N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 1473

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES - MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

M. Roger CUPPENS

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires.

soutenue le 27 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

MM. P. LEVY Président
D. DUGUE Examinateurs
PISOT

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 1478

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES - MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

M. Roger CUPPENS

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires.

soutenue le 27 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

MM. P. LEVY Président
D. DUGUE Examinateurs
PISOT

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici au problème suivant : une fonction caractéristique étant donnée, si on la décompose en produit de fonctions caractéristiques, que peut-on dire de ses facteurs ? Ce problème, né des travaux de H. Cramer, P. Lévy, A. Ya. Khintchine et D. A. Raikov de 1936 à 1940 et connu sous le nom d'Arithmétique des lois de probabilité, a été maintenant étudié d'une manière extensive dans le cas des fonctions caractéristiques définies sur la droite réelle (voir, par exemple, les monographies de D. Dugué [12], E. Lukacs [22] et Yu. V. Linnik [20]). En particulier, le problème fondamental de trouver des conditions sous lesquelles une fonction caractéristique indéfiniment divisible n'a que des facteurs indéfiniment divisibles (souvent appelé problème de Cramer) a été étudié par Yu. V. Linnik et tout récemment par I. V. Ostrovskiy ([27] à [29], [31]).

Mais le cas des fonctions caractéristiques définies sur $\mathbb{R}^n$ et celui plus général des fonctionnelles caractéristiques définies sur un espace de Banach n'ont été que peu étudiés. Les seuls résultats connus sont les théorèmes suivant lesquels tout facteur de la fonction caractéristique d'une loi normale à n variables est la fonction caractéristique d'une loi normale à n variables (Cramer [2]) et tout facteur de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson à n variables est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson à n variables (Teicher [37]), le premier résultat étant encore valable pour les fonctionnelles caractéristiques (Grenander [15], p. 141). Mais ni l'étude importante de l'analycité des fonctions caractéristiques de plusieurs variables, ni l'extension des résultats de Linnik et d'Ostrovskiy aux fonctions de plusieurs variables n'avaient été jusqu'ici abordées. C'est cette lacune que nous nous proposons de combler.

Après un chapitre de rappels sur les notions et résultats qui nous seront utiles dans la suite, nous abordons l'étude des fonctions caractéristiques analytiques au chapitre II. La plupart des résultats connus dans le cas des fonctions caractéristiques d'une variable réelle restent valables dans le cas des fonctions caractéristiques de plusieurs variables. Au chapitre III, est introduite une notion plus large que la notion de fonction caractéristique analytique. Les fonctions caractéristiques ainsi définies, introduites dans le cas d'une variable par Marcinkiewicz, possèdent des propriétés fort voisines des fonctions caractéristiques analytiques et fournissent le cadre naturel de l'étude de l'importante notion de probabilité limitée dans une direction.

Dans les chapitres qui suivent, nous abordons l'étude du problème de la décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. Le cadre naturel de cette étude n'est pas celui des fonctions caractéristiques, mais celui d'une classe plus large de fonctions, les fonctions à crête. Après avoir défini au chapitre IV ces fonctions, nous étudions le problème le plus simple, celui de la décomposition du produit d'une fonction caractéristique normale par une fonction caractéristique de Poisson. Le résultat ainsi obtenu contient les théorèmes de Cramer et de Teicher énoncés ci-dessus. Au chapitre suivant, ce problème est étendu au cas d'une loi indéfiniment divisible à spectre fini. Le résultat obtenu dans ce cas, bien que fort général, ne donne pas, comme le montre un exemple simple, une condition nécessaire et suffisante comme c'est le cas pour les fonctions caractéristiques d'une seule variable. En modifiant convenablement la méthode, on peut traiter le cas du produit d'une loi normale par une infinité dénombrable de lois de Poisson (au moins dans le cas où le "spectre de Poisson" n'a pas l'origine comme point d'accumulation), ce que nous montrons au chapitre VI. Le chapitre VII

contient le cas particulier des lois de treillis où nous obtenons une extension du résultat d'Ostrovskiy [27]. Au chapitre suivant, nous montrons enfin que les résultats d'Ostrovskiy [28] montrant l'existence de fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles à spectre de Poisson continu et n'ayant que des facteurs indéfiniment divisibles sont encore valables dans le cas de n dimensions.

Enfin, dans un dernier chapitre, est étudiée l'analycité des fonctionnelles caractéristiques définies sur un espace de Banach. Nous obtenons ainsi un théorème sur le domaine d'analycité de ces fonctionnelles et l'analogue du théorème de Raikov relatif à la décomposition de ces fonctionnelles.

Les principaux résultats exposés ici ont été annoncés dans une série de Notes parues dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences([5] à [10]). Quelques-uns des résultats des chapitres II, IV et VIII ont été obtenus indépendamment par I. V. Ostrovskiy ([30], [32])(1).

---

(1) Depuis que cette thèse a été écrite, I. V. Ostrovskiy a fait paraître les démonstration détaillées des résultats de [32] (qui sont sensiblement différentes des nôtres) dans deux articles : Quelques propriétés des fonctions caractéristiques analytiques des lois de probabilité de plusieurs variables, Teoriya funkcii funkcionalnii analyz i ih prilozeniya, vol. 2, 169-177 ; Sur la décomposition des lois indéfiniment divisibles de plusieurs variables sans composante gaussienne, Zap. Mehan. Matem. Fak. i Karkov. Obscestva, 32 (1966) 51-72.

Nous désirons exprimer toute notre reconnaissance à Madame M. Lafon, à Monsieur J. P. Lafon et à Monsieur D. Dugué pour leur aide matérielle et leur soutien moral sans lesquels ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour.

Notre reconnaissance va également à Monsieur P. Lévy qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider notre jury de thèse ainsi qu'à Monsieur Pisot qui a bien voulu se joindre à ce jury et nous proposer le deuxième sujet.

Nous désirons enfin remercier Monsieur A. Martineau dont les conseils et critiques nous ont toujours été très profitables, ainsi que Messieurs Yu. V. Linnik et E. Lukacs pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

CHAPITRE I

Rappels

I. Fonction caractéristique.

Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu de sous-ensembles de Ω et P une probabilité définie sur $\mathcal{A}$, on appelle vecteur aléatoire à n dimensions une fonction mesurable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Un tel vecteur aléatoire induit sur $\mathbb{R}^n$ une probabilité P_X définie par :

$$P_X(B) = P[\omega : X(\omega) \in B] \qquad B \in \mathcal{B}$$

La fonction caractéristique $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$ de X est alors le transformé de Fourier de P_X, c'est-à-dire :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(it.x)\ dP_X(x) \qquad t \in \mathbb{R}^n$$

où $t.x = t_1x_1 + \ldots + t_nx_n$ désigne le produit scalaire habituel des vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Dans ce qui suit, nous ferons abstraction de l'espace de probabilité de départ et considérons donc les fonctions caractéristiques comme les transformés de Fourier de probabilités définies sur $\mathbb{R}^n$. Nous n'emploierons qu'occasionnellement des vecteurs aléatoires dans les démonstrations et même dans ce cas ils ne servent qu'à la concision de la démonstration, leur emploi n'étant nullement indispensable. D'ailleurs, le développement de la théorie de la décomposition des fonctions caractéristiques à partir de la seule notion de vecteur aléatoire conduirait à des difficultés théoriques liées à la structure de l'espace Ω, même pour les notions les plus simples comme par exemple la définition des vecteurs aléatoires indéfiniment divisibles[1]. Néanmoins, on verra ci-

(1) Voir, à ce sujet, l'appendice I de la traduction anglaise du livre de B. V. Gnedenko et A. N. Kolmogorov "Limit distributions for sums of independent random variables".

dessous que la théorie de la décomposition des fonctions caractéristiques est liée étroitement au problème de la décomposition d'un vecteur aléatoire en somme de deux vecteurs aléatoires indépendants, ce qui explique son intérêt en théorie des probabilités.

Les propriétés fondamentales des fonctions caractéristiques sont les suivantes (pour la démonstration, voir par exemple [23]). Pour les énoncer, nous noterons f (avec ou sans indice) la fonction caractéristique de P (avec le même indice) définie sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1. (Théorème d'unicité).

$f_1 = f_2$ si et seulement si $P_1 = P_2$.

Théorème 1.2. (Théorème de convolution)

Si (1) $P = P_1 * P_2$[2]

alors (2) $f = f_1 f_2$.

Théorème 1.3. (Théorème de continuité)

Soient $\{P_k\}$ une suite de probabilités définies sur $\mathbb{R}^n$ et $\{f_k\}$ la suite des fonctions caractéristiques correspondantes. La suite $\{P_k\}$ converge vers une probabilité P pour tous les ensembles de continuité de P si et seulement si la suite $\{f_k\}$ converge vers une fonction f continue à l'origine. f est alors la fonction caractéristique de P.

Pour d'autres propriétés des fonctions caractéristiques à n dimensions, voir [23], chapitre I[3]. Nous n'en citerons qu'une dont nous nous servirons dans la suite :

Théorème 1.4. ([23], p. 25)

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de fonction ca-

---

(2) On sait que si X_1 et X_2 sont des vecteurs aléatoires indépendants induisant sur $\mathbb{R}^n$ des probabilités P_1 et P_2, la probabilité P induite par leur somme est donnée par cette formule.

(3) Nous supposons connue la théorie des fonctions caractéristiques à une dimension telle qu'on la trouve par exemple dans [23]

ractéristique $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Si chaque composante X_j de X a des moments finis jusqu'à l'ordre m , tous les moments produits

$$E(X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \, d\,P(x)$$

d'ordre total $(j_1 + \ldots + j_n = m)$ existent et de plus,

$$\left[\frac{\partial^m f(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_1^{j_1} \ldots \partial t_n^{j_n}}\right]_{t_1 = \ldots = t_n = 0} = i^m E(X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n})$$

$(j_1 + \ldots + j_n = m)$

Nous utiliserons aussi systématiquement une méthode dûe à Cramer et Wold [4]. D'après cette méthode, on peut souvent ramener l'étude d'une loi de probabilité P à n variables à l'étude de ses projections si on appelle projection de la probabilité P sur un vecteur $y_o \in \mathbb{R}^n$ $(y_o \neq 0)$ la loi $\tilde{P}$ définie par

$$\tilde{P}(A) = P\{x : y_o . x \in A\}$$

pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}$. Les fonctions caractéristiques ϕ et $\tilde{\phi}$ de P et $\tilde{P}$ sont alors liées par la relation

$$\tilde{\phi}(\lambda) = \phi(\lambda y_o) .$$

Dans la suite, nous nous intéressons spécialement à la réciproque du théorème 1.2 : étant donnée une fonction caractéristique f, que peut-on dire des fonctions caractéristiques f_1 et f_2, vérifiant (2). Comme on le voit immédiatement, ceci est équivalent au problème suivant : étant donnée une probabilité P , que peut-on dire des probabilités P_1 et P_2 vérifiant (1). De plus, ces problèmes sont étroitement liés à la décomposition d'un vecteur aléatoire donné X en somme de vecteurs aléatoires indépendants, comme le montre la note (2).

Si on introduit les probabilités dégénérées assignant la probabilité 1 à un seul point de $\mathbb{R}^n$ dont les fonctions caractéristiques sont de la forme $\exp[i\, P_1(t)]$ où P_1 est un polynôme

homogène du premier degré à coefficients réels, alors de la formule

$$(3)\quad f(t) = \exp[i\,P_1(t)] \cdot \{f(t)\exp[-i\,P_1(t)]\}$$

et en remarquant que dans les crochets on a une fonction caractéristique, nous obtenons que $\exp[i\,P_1(t)]$ divise toutes les fonctions caractéristiques. Une fonction caractéristique f pour laquelle toutes les décompositions (2) sont de la forme (3) est dite indécomposable. L'importance de la classe des fonctions caractéristiques indécomposables et de la classe des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles que nous introduisons maintenant résultera des théorèmes de Khintchine que nous donnerons au paragraphe 3.

II. Fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles.

Une fonction caractéristique $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$ est indéfiniment divisible si pour tout entier positif k il existe une fonction caractéristique $f_k(t)$ telle que

$$f(t) = [f_k(t)]^k \qquad\qquad t \in \mathbb{R}^n$$

On sait (voir par exemple [19], pp. 214-221) que toute fonction caractéristique indéfiniment divisible $f(t)$ est représentable sous la forme suivante (dite représentation de Lévy - Khintchine)

$$(4)\quad f(t) = \exp\{i\,P_1(t) - P_2(t) + \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(it.u) - 1 - \frac{it.u}{1+|u|^2}]\,dm(u)\}$$

$$(t \in \mathbb{R}^n)$$

où $P_1(t)$ est un polynôme homogène du premier degré en t à coefficients réels, $P_2(t)$ un polynôme homogène du second degré en t positif ou nul pour $t \in \mathbb{R}^n$ et m une mesure positive ou nulle dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$(5)\quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{1+|u|^2}\,dm(u) < +\infty$$

le symbole $\int_{\mathbb{R}^n}$ indiquant une intégrale prise sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine.

On sait, de plus, que la représentation (4) est unique (même si on abandonne l'hypothèse que la mesure m est positive ou nulle pourvu que (5) soit vérifiée), c'est-à-dire que pour toute fonction caractéristique $f(t)$ représentable par (4), les polynômes P_1 et P_2 et la mesure m sont déterminés de manière unique par f. En particulier, si m n'est pas positive ou nulle dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$, la fonction caractéristique $f(t)$ n'est pas indéfiniment divisible.

Comme dans Linnik [20], nous appellerons partie gaussienne de f le polynôme P_2 et spectre de Poisson de f le support de la mesure m (que nous appellerons parfois fonction spectrale). Dans le cas où le spectre de Poisson est borné (c'est-à-dire où la mesure m est à support compact), on montre alors facilement à partir de (4) que $f(t)$ admet la représentation unique

$$(6)\quad f(t) = \exp\{i\,P_1(t) - P_2(t) + \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(it.u) - 1]\,dm(u)\}$$

où P_1, P_2 et m ont les mêmes propriétés que précédemment (le polynôme P_1 étant différent de celui donné par (4)).

III. Théorèmes généraux de décomposition.

Nous énonçons maintenant deux théorèmes généraux sur la décomposition des fonctions caractéristiques définies sur $\mathbb{R}^n$. Ils ont été démontrés par Khintchine dès 1937 pour le cas $n = 1$ et on sait leur validité pour les fonctions caractéristiques définies sur des groupes abéliens localement compacts (voir [33]).

Théorème 1.5. Toute fonction caractéristique $f(t) = f(t_1,\ldots,t_n)$ est représentable sous la forme

$$(7)\qquad f = f_1\, f_2$$

où f_1 est le produit convergent d'un ensemble fini ou dénombra-

ble de fonctions caractéristiques indécomposables et f_2 une fonction caractéristique sans facteur indécomposable (4).

On sait que la représentation (7) n'est pas unique.

Théorème 1.6.

Toute fonction caractéristique sans facteur indécomposable est indéfiniment divisible.

On sait que la réciproque du théorème 1.6. est fausse : il existe des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles ayant des facteurs indécomposables. Il se pose alors le problème (dit problème de Cramer, bien que ce soit Raikov qui, dès 1937, l'ait formulé explicitement) de caractériser la famille (que nous appellerons I_o) des fonctions caractéristiques sans facteur indécomposable (ou, ce qui revient au même, des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles qui n'ont que des facteurs indéfiniment divisibles). C'est ce problème, comme annoncé dans l'introduction, que nous étudierons des chapitres IV à VIII.

Nous pouvons étendre un peu ce problème en introduisant la notion de décomposition - α : étant donnée une fonction caractéristique $f(t)$, que peut-on dire des fonctions caractéristiques $f_j(t)$ vérifiant pour $|t|$ assez petit

$$f(t) = \prod_{j=1}^{p} [f_j(t)]^{\alpha_j} \qquad t \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

où α_j sont des nombres réels positifs. Nous noterons I'_o la classe des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles f telles que la relation (8) implique que tous les f_j sont indéfiniment divisibles. On peut encore étendre le problème en remplaçant (8) par la relation

$$f(t) = \prod_{j=1}^{\infty} [f_j(t)]^{\alpha_j} \tag{9}$$

---

(4) Pour le cas d'un groupe abélien localement compact, il faut ajouter un troisième facteur idempotent f_3 .

où $\{a_j\}$ est une suite de nombres réels tels que $a_j \geq \varepsilon_o > 0$ (ε_o constante). Nous avons alors une famille I''_o définie d'une manière analogue. Il est évident que

$$I''_o \subset I'_o \subset I_o$$

On ne sait pas à l'heure actuelle (même dans le cas $n = 1$) si

$$I_o = I'_o = I''_o$$

CHAPITRE II

Théorèmes généraux sur les fonctions caractéristiques analytiques

I. Définition. Propriétés fondamentales.

Soient $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f(t)$ la fonction caractéristique d'une probabilité P définie sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe une fonction $A(z)$ de $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, analytique dans un voisinage de l'origine et n constantes strictement positives $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ telles que

$$f(t) = A(t) \qquad t \in \mathbb{R}^n, \quad |t_m| < \Delta_m$$

nous dirons que $f(t)$ est une fonction caractéristique analytique.

Nous avons alors, d'après le théorème 1.4.

$$(1) \qquad f(z) = \sum_k \frac{i^{k_1 + \ldots + k_n}}{k_1! \ldots k_n!} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = \sum_k \frac{i^k}{\alpha_k} z^k$$

où

$$\alpha_{k_1, \ldots, k_n} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \, dP(x)$$

Par hypothèse, la série de (1) converge dans un polydisque centré à l'origine et de polyrayon $R = (R_1, \ldots, R_n)$, c'est-à-dire que la série de (1) converge pour $\{z : |z_m| < R_m, m = 1, \ldots, n\}$. Considérons les fonctions

$$f_o(z) = \sum_k \frac{(-1)^{k_1 + \ldots + k_n}}{(2k_1)! \ldots (2k_n)!} \alpha_{2k_1, \ldots, 2k_n} z_1^{2k_1} \ldots z_n^{2k_n}$$

et

$$f_1(z) = f(z) - f_o(z)$$

$f_o(z)$ et $f_1(z)$ convergent dans des polydisques centrés à l'origine et de polyrayons respectifs R_o' et R_1' avec $R_o' \geq R$ et $R_1' \geq R$.

Des inégalités

$$|\alpha_{2k_1, \ldots, 2k_{m-1}, 2k_m - 1, 2k_{m+1}, \ldots, 2k_n}| \leq \beta_{2k_1, \ldots, 2k_{m-1}, 2k_m - 1, 2k_{m+1}, \ldots, 2k_n}$$

$$\leq \frac{1}{2}[\alpha_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_n} + \alpha_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m-2,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_n}] \quad (m = 1, \ldots, n)$$

$$|\alpha_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m-1,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_{p-1},\ 2k_p-1,\ 2k_{p+1},\ldots,2k_n}|$$

$$\leq \beta_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m-1,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_{p-1},\ 2k_p-1,\ 2k_{p+1},\ldots,2k_n}$$

$$\leq \frac{1}{2}[\alpha_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_{p-1},\ 2k_p,\ 2k_{p+1},\ldots,2k_n} + \alpha_{2k_1,\ldots,2k_{m-1},\ 2k_m-2,\ 2k_{m+1},\ldots,2k_{p-1},\ 2k_p-2,\ 2k_{p+1},\ldots,2k_n}]$$

$$(m < p\ ;\ m = 1, \ldots, n-1\ ;\ p = 2, \ldots, n)$$

$$|\alpha_{2k_1-1,\ 2k_2-1,\ \ldots,\ 2k_n-1}| \leq \beta_{2k_1-1,\ 2k_2-1,\ \ldots,\ 2k_n-1}$$

$$\leq \frac{1}{2}[\alpha_{2k_1,\ 2k_2,\ \ldots,\ 2k_n} + \alpha_{2k_1-2,\ 2k_2-2,\ \ldots,\ 2k_n-2}]$$

où

$$\beta_{k_1,\ \ldots,\ k_n} = \int_{\mathbb{R}^n} |x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}|\, d\mathfrak{P}(x)$$

on déduit facilement que $R_1' \geq R_0'$ (et par conséquent $R_0' = R$, mais on a en général $R_1' \neq R$) [1]. On en déduit aussi la convergence de la série

$$(2) \qquad \sum_k \frac{\beta_{k_1,\ \ldots,\ k_n}}{k_1! \ldots k_n!}\, z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = \sum_k \frac{\beta_k}{k!}\, z^k$$

dans le polydisque de centre l'origine et de polyrayon R.

Prenons maintenant un point ξ de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons lui associer sa série de Taylor

$$(3) \qquad \sum_k \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k f(\xi)}{\partial z^k}\, (z - \xi)^k$$

Or

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial^k f(\xi)}{\partial z^k}\right| = \left|\left[\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}\right]_{z=\xi}\right| \leq \beta_{k_1 \ldots k_n} = \beta_k$$

Donc la série (3) converge au moins dans le polydisque de centre ξ

---

(1) Contrairement à ce qu'a écrit R. G. Laha [18] dans le cas $n = 1$; l'exemple $f(t) = 1/(1+t^2)$ prouve l'inexactitude de la conclusion $R_1' = R$ dans le cas $n = 1$.

et de polyrayon R.. De plus, puisque

$$\frac{\partial^k f(\xi)}{\partial z^k} = i^k \int_{\mathbb{R}^n} x^k \exp(i\xi.x)\, dP(x)$$

on déduit de (3) que dans ce polydisque

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_k \frac{i^k}{k!} \left[\int_{\mathbb{R}^n} x^k \exp(i\xi.x)\, dP(x)\right] (z-\xi)^k \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_k \frac{i^k}{k!} x^k (z-\xi)^k\right] \exp(i\,\xi.x)\, dP(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\, z.x)\, P(dx) \end{aligned}$$

(4) et la convergence de (2) justifiant l'interversion des signes somme et sigma.

Plus généralement, si f est analytique[2] dans un polydisque de centre $i\, y_o$ ($y_o \in \mathbb{R}^n$) et de polyrayon ρ, on montre de même que f est analytique dans tout polydisque de centre $x + i\, y_o$ ($x \in \mathbb{R}^n$) et de polyrayon ρ et que, dans toute la polybande ainsi formée, nous avons

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(iz.x)\, P(dx)$$

Or, on montre facilement que si $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y_o.x)\, dP(x)$ est convergente, alors $f(z)$ est analytique en $i\lambda y_o$ pour $0 \leq \lambda < 1$. Donc $f(z)$ est analytique dans un tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ où Γ est l'intérieur du domaine de convergence de $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y.x)\, dP(x)$ et par conséquent, Γ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ d'après les propriétés bien connues de l'exponentielle.

Nous montrons de plus que tout point imaginaire pur appartenant à la frontière du tube de convergence est un point singulier de f. Supposons au contraire qu'un point iy_o ($y_o \in \mathbb{R}^n$) de cette frontière soit un point régulier. Il existe alors un polydisque de centre iy'_o ($y'_o \in \Gamma$) où la fonction f se prolonge analytiquement

---

(2) Ici et dans la suite, nous utilisons le classique abus de langage consistant à confondre une fonction caractéristique analytique et son prolongement analytique.

et tel que iy_0 soit intérieur à ce polydisque. Alors $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y.x)$ $dP(x)$ existe pour $y = y_0 + \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ assez petit. Ceci contredit la définition de Γ comme domaine de $\mathbb{R}^n$ où $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y.x)\, dP(x)$ converge. Nous avons donc démontré le

Théorème 2.1.

Si une fonction caractéristique $f(t)$ est analytique dans un voisinage de l'origine, elle est analytique dans un tube convexe $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ (où Γ est l'intérieur du domaine de convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y.x)\, dP(x)$) et y est représentable par l'intégrale de Fourier

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(iz.x)\, dP(x)$$

Tout point imaginaire pur appartenant à la frontière du tube d'analycité est un point singulier de f.

Corollaire 1. (Propriété de crête).

Si $f(z)$ est une fonction caractéristique analytique dans un tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$, alors

$$|f(x+iy)| \leq f(iy) \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Gamma)$$

Plus généralement :

$$\left|\frac{\partial^{2(k_1 + \ldots + k_n)} f(x+iy)}{\partial z_1^{2k_1} \ldots \partial z_n^{2k_n}}\right| \leq \left|\frac{\partial^{2(k_1 + \ldots + k_n)} f(iy)}{\partial z_1^{2k_1} \ldots \partial z_n^{2k_n}}\right| \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Gamma$$

Démonstration. La représentation

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(iz.x)\, dP(x) \qquad \text{Im } z \in \Gamma$$

implique

$$\frac{\partial^{2(k_1 + \ldots + k_n)} f(z)}{\partial z_1^{2k_1} \ldots \partial z_n^{2k_n}} = (-1)^{k_1 + \ldots + k_n} \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{2k_1} \ldots x_n^{2k_n} \exp(iz.x)\, dP(x) \quad (\text{Im } z \in \Gamma)$$

d'où on déduit immédiatement le corollaire.

Corollaire 2.

Soient $f(z)$ une fonction caractéristique analytique dans le tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ et $\eta \in \Gamma$, alors la fonction

$$g(z) = \frac{f(z + i\eta)}{f(i\eta)}$$

est une fonction caractéristique analytique dans le tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma'$ avec $\Gamma' = \Gamma - \eta = \{y' : y' = y - \eta,\ y \in \Gamma\}$.

Démonstration. On vérifie facilement que la fonction $Q(A) = [f(i\eta)]^{-1} \int_A \exp(-\eta.x)\, dP(x)$ est une probabilité dont la fonction caractéristique est g. L'analycité de g se déduit immédiatement du théorème 2.1.

Le théorème suivant donne une caractérisation simple des fonctions caractéristiques analytiques.

Théorème 2.2.

Soient Γ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ouvert, convexe et contenant l'origine et f la fonction caractéristique d'une probabilité P. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(I) f est analytique dans $\mathbb{R}^n + i\Gamma$;

(II) la fonction $g(\lambda) = f(\lambda y_o)$ est une fonction caractéristique qui est valeur au bord d'une fonction analytique dans la bande $0 < \mathrm{Im}\ \lambda < 1$ (c'est-à-dire, il existe une fonction $\phi(\lambda) = \phi(\mu + i\nu)$ analytique pour $0 < \nu < 1$ telle que $\lim_{\nu \to 0_+} \phi(\mu + i\nu) = g(\mu)$) quel que soit $y_o \in \Gamma$.

(III) l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y_o.x)\, dP(x)$$

converge quel que soit $y_o \in \Gamma$.

Démonstration. Ce théorème est connu dans le cas $n = 1$ (voir, par exemple, Marcinkiewicz [25](3)).

---

(3) Voir aussi le chapitre suivant.

L'équivalence des conditions (II) et (III) se déduit du cas $n = 1$ en introduisant la probabilité $\tilde{P}$ définie sur tous les ensembles boréliens A de $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{P}(A) = P\{x : y_o . x \in A\}$$

dont g est la fonction caractéristique. Du théorème 2.1., on déduit que (I) implique (III). Pour montrer que (II) implique (I), nous utilisons le lemme suivant :

Lemme.

Si $f(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction caractéristique telle que les n fonctions caractéristiques marginales $f(0,\ldots,0,z_j,0,\ldots,0)$ soient analytiques dans $\{z_j : |\mathrm{Im}\ z_j| < R\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, alors f est analytique dans la polybande $\{z : |\mathrm{Im}\ z| < R/n\}$.

Démonstration. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de fonction caractéristique $f(z_1, \ldots, z_n)$. Des hypothèses, on déduit que $E(X_j^k)$ existe $(j = 1, \ldots, n ; k = 1, 2, \ldots)$ et du théorème 1.4., on déduit que toutes les dérivées partielles de f à l'origine existent.

De plus, de l'analycité de $f(0,\ldots,0,z_j,0,\ldots,0)$, on déduit la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(|X_j^k|)}{k!} z_j{}^k$$

pour $-R < z_j < R$, d'où

$$E(|X_j|^k) \leq C\, m!\, (R - \varepsilon)^{-m}$$

ceci quel que soit $\varepsilon > 0$ où C est une constante dépendant de ε. En utilisant l'inégalité de Hölder

$$(|X_1| + \ldots + |X_n|)^m \leq n^{m-1} (|X_1|^m + \ldots + |X_n|^m)$$

nous obtenons

$$\frac{m!}{(k_1)! \ldots (k_n)!} E(|X_1|^{k_1} \ldots |X_n|^{k_n}) \leq n^m \sup_j E(|X_j|^m) \tag{5}$$

$$k_1 + \ldots + k_n = m$$

d'où

$$\frac{m!}{(k_1)! \dots (k_n)!} \left| \frac{\partial^m f(0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \right| \leq n^m \, Cm! \, (R - \varepsilon)^{-m} \qquad k_1 + \dots + k_n = m$$

ce qui entraîne la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{(k_1)! \dots (k_n)!} \frac{\partial^m f(0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \, z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

pour $|z| < (R - \varepsilon)/n$ quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui, avec le théorème 2.1., démontre le lemme.

Si (II) est vérifié, il existe un $R > 0$ tel que les n fonctions caractéristiques marginales $f(0,\dots,0,z_j,0,\dots,0)$ soient analytiques dans les deux bandes $-R < \operatorname{Im} z_j < 0, 0 < \operatorname{Im} z_j < R$ et par conséquent (cas $n = 1$) dans $-R < \operatorname{Im} z_j < R$. On déduit alors du lemme que $f(z)$ est analytique dans un voisinage de l'origine et du théorème 2.1. que $f(z)$ est analytique dans $\mathbb{R}^n + i\Gamma$.

Du théorème 2.2., on déduit le corollaire suivant qui est une généralisation du lemme précédent.

Corollaire[4].

Soit f une fonction caractéristique définie sur $\mathbb{R}^n$. Si, pour n vecteurs indépendants $\tau_1, \dots, \tau_n$ de $\mathbb{R}^n$, la fonction $g(\lambda) = f(\lambda\tau_j)$ est une fonction caractéristique analytique dans la bande $\{-\alpha_j < \operatorname{Im} \lambda < \beta_j\}$ $(\alpha_j > 0, \beta_j > 0)$ $(j = 1, \dots, n)$, f est analytique dans le tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ où Γ est le plus petit domaine convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant les n intervalles $\{t : t = \lambda_j\tau_j, -\alpha_j < \lambda_j < \beta_j\}$.

Démonstration. Des hypothèses, on déduit la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda_j \tau_j . x) \, dP(x)$$

$(-\alpha_j < \lambda_j < \beta_j)$ et de la convexité de la fonction exponentielle, on en déduit la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y_0 . x) \, dP(x)$$

(4) Ce résultat a été énoncé par Ostrovskiy [32] sans démonstration.

quel que soit $y_o \in \Gamma$, Γ étant le domaine convexe défini dans l'énoncé, ce qui, d'après le théorème précédent, démontre le corollaire.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons montrer comment déduire des résultats précédents les analogues multidimensionnels des théorèmes relatifs à la décomposition des fonctions caractéristiques analytiques.

II. Théorème de Raikov.

Théorème 2.3. (théorème de Raikov)

Si $f_o(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ $(z = (z_1, \ldots, z_n))$ sont des fonctions caractéristiques telles que pour $\Delta > 0$ assez petit, on ait

$$f_o(z) = f_1(z)\, f_2(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n \quad |z| < \Delta \tag{6}$$

et si $f_o(z)$ est analytique dans un tube convexe $T = \mathbb{R}^n + i\Gamma$, alors $f_j(z)$ $(j = 1, 2)$ est analytique dans T et l'égalité (6) a lieu dans tout T .

Démonstration. Soit $y_o \in \Gamma$. Posons

$$g_j(\lambda) = f_j(\lambda y_o) \; ; \quad \tilde{P}_j(A) = P_j\{x : y_o.x \in A\} \qquad (j = 0, 1, 2)$$

pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}$. Alors g_j est la fonction caractéristique de $\tilde{P}_j$ et de (6) on déduit l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que

$$g_o(\lambda) = g_1(\lambda)\, g_2(\lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \; |\lambda| < \varepsilon \tag{7}$$

De plus, $g_o(\lambda)$ est une fonction caractéristique analytique. Du théorème de Raikov unidimensionnel (voir, par exemple, Lukacs [22], théorème 8.1.1), on déduit que $g_j(\lambda)$ est une fonction caractéristique analytique $(j = 1, 2)$ et que (7) est valable quel que soit λ réel. On en déduit que

$$\tilde{P}_o = \tilde{P}_1 * \tilde{P}_2$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y_o.x)\, dP_o(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-t)\, d\tilde{P}_o(t)$$

converge. On déduit alors d'un résultat bien connu (voir, par exemple, Loève [21], p. 214) que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-t)\, d\tilde{P}_j(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y_o.x)\, dP_j(x)$$

converge. Comme ceci est vrai quel que soit $y_o \in \Gamma$, f_j est analytique dans T d'après le théorème 2.2. La validité de (6) dans T est une conséquence de l'unicité du prolongement analytique.

Corollaire.

Dans les conditions du théorème précédent, il existe une constante $k > 0$ et $m \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f_1(-iv) \leq k \exp(m.|v|)\, f(-iv) \quad (|v| = (|v_1|, \ldots, |v_n|),\ v \in \Gamma)$$

Démonstration. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n} \in \mathbb{R}^n$ $(a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn}))$ des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les inégalités

$$P(y_1 \leq a_{11}, \ldots, y_n \leq a_{1n}) = k_1 > 0$$

$$P(y_1 \geq a_{21}, y_2 \leq a_{22}, \ldots, y_n \leq a_{2n}) = k_2 > 0$$

$$P(y_1 \geq a_{2^n,1}, y_2 \geq a_{2^n,2}, \ldots, y_n \geq a_{2^n,n} = k_n > 0$$

où $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ est un vecteur aléatoire de fonction caractéristique f_2. En posant

$$k = \sup\,(1/k_1, \ldots, 1/k_n)$$

$$m = (m_1, \ldots, m_n) \qquad m_j = \sup(|a_{1j}|, \ldots, |a_{2^n j}|)$$

nous obtenons

$$f_2(-iv) \geq \frac{1}{k} \exp[-m.|v|]$$

ce qui, avec (6), démontre le corollaire.

III. Fonctions caractéristiques entières.

Soit σ une norme complexe dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\sigma(x + iy) = \sigma(x - iy)$.

Pour une fonction entière f, nous posons

$$M_\sigma(f;R) = \sup_{\sigma(z)\le R} |f(z)| = \sup_{\sigma(z)=R} |f(z)|$$

Nous définissons l'ordre ρ et le σ-type τ_σ de f par

$$\rho = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log\log M_\sigma(f;R)}{\log R} \quad ; \quad \tau_\sigma = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log M_\sigma(f;R)}{R^\rho}$$

Nous avons alors le théorème fondamental sur la décomposition des fonctions caractéristiques entières.

Théorème 2.4.

Soient f, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques telles que

$$f(t) = f_1(t)\, f_2(t) \qquad t \in \mathbb{R}^n$$

1 - Si f est une fonction caractéristique entière, f_j est une fonction caractéristique entière ($j = 1, 2$).

2 - Si f est une fonction caractéristique entière d'ordre fini ρ, f_j est une fonction caractéristique entière d'ordre fini $\rho_j \le \rho$ ($j = 1, 2$).

3 - Si f est une fonction caractéristique entière de σ-type exponentiel τ, f_j est une fonction caractéristique entière de σ-type exponentiel $\tau_j \le \tau$ ($j = 1, 2$).

Démonstration. Le 1 résulte immédiatement du théorème de Raikov. Les 2 et 3 se déduisent immédiatement du corollaire du théorème 2 et du lemme suivant

Lemme.

Si f est une fonction caractéristique entière, alors

$$M_\sigma(f;R) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n,\ \sigma(v)=R} [f(iv)]$$

En effet, soit $z = t + iv$; $\sigma(z) = R$. D'après la propriété de crête (corollaire 1 du théorème 1)

$$|f(z)| \le f(iv)$$

Comme de plus $\sigma(v) \le R$, nous obtenons le lemme.

Le résultat suivant d'un caractère un peu plus spécialisé nous servira au chapitre VIII.

Théorème 2.5.

Soit σ une norme complexe sur $\mathbb{C}^n$. Si $f_o(z) = \exp[g_o(z)]$ est une fonction caractéristique entière sans zéros des n variables complexes $z = (z_1, \ldots, z_n)$ telle que $g_o(z)$ soit une fonction entière de σ-type exponentiel τ et si

$$f_o(z) = f_1(z)\, f_2(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

où $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions caractéristiques, alors

$$f_m(z) = \exp[g_m(z)] \qquad (m = 1, 2)$$

où $g_m(z)$ est une fonction entière de σ-type exponentiel $\tau_m \leq \tau$. Si de plus,

$$\limsup_{r \to +\infty} [r^{-1} \log | g_o(i\, r\theta)|] \leq h(\theta)$$

où $h(\theta)$ est une fonction positivement homogène de $\theta \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\limsup_{r \to +\infty} [r^{-1} \log | g_1(i\, r\theta)|] \leq h(\theta)$$

Démonstration. Puisque $f_o(z)$ est entière, d'après le théorème de Raikov, $f_m(z)$ est aussi entière $(m = 1, 2)$. Si $f_o(z)$ est sans zéros, $f_m(z)$ est aussi sans zéros. Nous avons donc

$$f_m(z) = \exp[g_m(z)] \qquad (m = 1, 2)$$

où $g_m(z)$ est une fonction entière telle que $g_m(0) = 0$. Posons

$$U_m(x,y) = \mathrm{Re}\ g_m(z)\ ;\ V_m(x,y) = \mathrm{Im}\ g_m(z) \quad (m = 0,1,2\ ;\ x,y \in \mathbb{R}^n\ ;\ x + iy = z)$$

Puisque $f_1(z)$ est une fonction caractéristique entière, elle vérifie dans tout $\mathbb{C}^n$ la propriété de crête qui peut s'écrire

$$U_1(x,y) \leq U_1(0,y) \tag{8}$$

et puisque $f_o(z)/f_1(z)$ est aussi une fonction caractéristique entière, nous obtenons

(9) $$U_o(x,y) - U_1(x,y) \leq U_o(0,y) - U_1(0,y)$$

d'où, en combinant (8) et (9) :

(10) $$|U_1(x,y)| \leq |U_1(0,y)| + U_o(0,y) - U_o(x,y)$$

Lemme 1.

$|U_1(0,y)| = O[\exp(\tau + \varepsilon)\,\sigma(y)]$ quand $\sigma(y) \to \infty$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

En effet, d'après le corollaire du théorème 2.3., il existe une constante $k > 0$ et un vecteur m de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$f_1(iy) \leq k \exp(m.|y|)\, f_o(iy)$$

ce qui entraîne

$$U_1(0,y) \leq U_o(0,y) + (m.|y|) + \log k$$

d'où on déduit immédiatement le lemme.

En combinant le lemme et (10), nous obtenons

(11) $$|U_1(x,y)| = O(\exp(\tau + \varepsilon)\,\sigma(z))$$

lorsque $\sigma(z) \to \infty$ quel que soit $\varepsilon > 0$. On déduit alors la première partie du théorème du lemme suivant (qui peut être intéressant en lui-même).

Lemme 2.

Si $U_1(x,y)$ vérifie (11) lorsque $\sigma(z) \to \infty$ quel que soit $\varepsilon > 0$, alors $g_1(z)$ est de σ-type exponentiel τ .

Démonstration. Soit θ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Nous posons pour θ fixé et $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$

$$g_1(\lambda\theta) = h_1(\lambda) \; ; \quad U_1(\mu\theta,\, \nu\theta) = w_1(\mu,\, \nu)$$

h_1 et w_1 sont alors liées par la formule intégrale de Poisson (voir, par exemple, [23], p. 156).

(12) $$h_1(\lambda) = i\,\mathrm{Im}\, h_1(0) + \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} w_1(R\cos\phi,\, R\sin\phi)\, \frac{R\, e^{i\phi} + \lambda}{R\, e^{i\phi} - \lambda}\, d\phi$$

si $|\lambda| < R$. Or, (11) entraîne

$$w_1(\mu,\nu) = O(\exp(\tau+\varepsilon)\,\sigma(\lambda\theta))$$

lorsque $|\lambda| \to \infty$, d'où puisque la norme σ est une norme complexe

$$w_1(R\cos\phi,\ R\sin\phi) = O(\exp(\tau+\varepsilon)\,R\,\sigma(\theta))$$

lorsque $R \to \infty$. En prenant $R = |\lambda| + \varepsilon$, nous obtenons de (12) que, quel que soit $\varepsilon > 0$

$$|h_1(\lambda)| = O(\exp(\tau+3\varepsilon)\,\sigma(\lambda\theta))$$

Puisque θ est arbitraire, on en déduit immédiatement que

$$|g_1(z)| = O\,(\exp(\tau+3\varepsilon)\,\sigma(z))$$

lorsque $\sigma(z) \to \infty$ quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le lemme.

Pour démontrer la deuxième partie, il suffit de remarquer que le lemme 1 devient dans ce cas

$$|U_1(0,\ r\theta)| = O\,[\exp[(h(\theta)+\varepsilon)r]] \qquad (r \to +\infty)$$

et que

$$V_1(0,r\theta) = 0$$

quel que soient r et θ .

Remarque. Le théorème reste valable si $f_0(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ sont des fonctions entières vérifiant la propriété de crête, mais ceci ne nous sera pas utile dans la suite.

IV. Décompositions - α .

Linnik ([20], théorème 4.2.1.) a étendu le théorème de Raikov aux factorisations d'une fonction caractéristique en puissances positives de fonctions caractéristiques. Une forme un peu plus générale de ce résultat fut donnée par Dugué [13]. Nous pouvons énoncer le résultat de Dugué sous la forme suivante :

Soient $f_0(z)$ une fonction caractéristique analytique dans une bande $B = \{z : -\alpha < \mathrm{Im}\ z < \beta\ ;\ \alpha > 0,\ \beta > 0\}$, $f_j(z)$ $(j = 1,\ldots,p)$ p fonctions caractéristiques et a_j $(j = 1,\ldots,p)$ p nombres strictement positifs. Si, pour $\Delta > 0$ assez petit, on a

$$(13) \qquad \prod_{j=1}^{p} [f_j(z)]^{\alpha_j} = f_o(z) \qquad z \in \mathbb{R},\ |z| < \Delta$$

alors $f_j(z)$ est analytique dans B $(j = 1, \ldots, p)$ et la relation (13) est vérifiée en tout point imaginaire pur de B . Si, de plus, f_o n'a pas de zéros dans B , la relation (13) est vérifiée dans tout B .

En réponse à une question de Linnik ([20], p. 285), Mamay [24] a étendu ce résultat aux produits infinis sous la forme suivante

Soient $f_o(z)$ une fonction caractéristique analytique et sans zéros dans une bande $B = \{z : -\alpha < \text{Im } z < \beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0\}$, $\{f_j(z)\}$ une suite de fonctions caractéristiques et $\{\alpha_j\}$ une suite de nombres réels positifs vérifiant $\alpha_j \geq \varepsilon > 0$. Si, pour $\Delta > 0$ assez petit, on a

$$(14) \qquad \prod_{j=1}^{\infty} [f_j(z)]^{\alpha_j} = f_o(z) \qquad z \in \mathbb{R},\ |z| < \Delta$$

alors $f_j(z)$ est analytique dans B $(j = 1, 2, \ldots)$ et la relation (14) est valable dans tout B .

Nous allons maintenant étendre ces deux résultats aux fonctions caractéristiques de n variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Théorème 2.6.

Soient $f_o(z)$ une fonction caractéristique analytique dans un tube imaginaire $T = \mathbb{R}^n + i\Gamma$, $f_j(z)$ $(j = 1, \ldots, p)$ p fonctions caractéristiques et α_j $(j = 1, \ldots, p)$ p nombres strictement positifs. Si, pour $\Delta > 0$ assez petit, on a

$$(15) \qquad \prod_{j=1}^{p} [f_j(z)]^{\alpha_j} = f_o(z) \qquad z \in \mathbb{R},\ |z| < \Delta$$

alors $f_j(z)$ est analytique dans T $(j = 1, \ldots, p)$ et la relation (15) est vérifiée en tout point imaginaire pur de T . Si, de plus, f_o n'a pas de zéros dans T , la relation (15) est vérifiée dans tout T .

La démonstration de ce théorème n'est qu'une version simplifiée

de la démonstration du théorème suivant et sera donc omise. Remarquons de plus que si α_j est rationnel $(j = 1, \ldots, p)$, ce théorème est contenu dans le théorème de Raikov et que la dernière proposition est valable dans le cas où les α_j sont entiers même si $f_o(z)$ a des zéros dans T.

Théorème 2.7.

Soient $f_o(z)$ une fonction caractéristique analytique dans un tube imaginaire $T = \mathbb{R}^n + i\Gamma$, $\{f_j(z)\}$ une suite de fonctions caractéristiques et $\{\alpha_j\}$ une suite de nombres réels vérifiant $\alpha_j \geq \varepsilon_o > 0$. Si, pour $\Delta > 0$ assez petit, on a

$$\prod_{j=1}^{\infty} [f_j(z)]^{\alpha_j} = f_o(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n, \ |z| < \Delta \tag{16}$$

alors les f_j sont analytiques dans T et la relation (16) est vérifiée en tout point imaginaire pur de T. Si, de plus, f_o n'a pas de zéros dans T, la relation (16) est vérifiée dans tout T.

Remarque. Dans le cas où tous les α_j sont entiers, ce théorème est encore contenu dans le théorème de Raikov d'après le théorème de continuité des fonctions caractéristiques (théorème 1.3.) et dans ce cas la dernière proposition est valable même si $f_o(z)$ a des zéros dans T.

Démonstration. Nous démontrons d'abord le cas $n = 1$ puisque notre théorème n'est pas dans ce cas contenu dans le théorème de Mamay(5). Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant

Lemme.

Dans tout cercle centré à l'origine où $f_o(z)$ est analytique et sans zéros, les $f_j(z)$ sont analytiques et (16) est vérifiée.

En effet, soit R_o le rayon d'un tel cercle. En posant

$$m_{jp} = i^{-p} \frac{d^p f_j(0)}{dz^p}$$

(5) Voir aussi un article récent de B. Ramachandran [35].

nous avons l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2q\, \alpha_j\, m_{j,2q} \leq (2q)!\, \left(\frac{4M}{R_o}\right)^{2q}$$

où

$$M = \sup_{|z|=R_o/2} |f_o(z)|$$

Ceci résulte immédiatement d'une inégalité analogue obtenue par Mamay dans le cas des fonctions caractéristiques symétrisées ([24], lemme 3). On en déduit immédiatement l'inégalité

$$(17) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, m_{j,2q} \leq \frac{1}{2q}\, (2q)!\, \left(\frac{4M}{R_o}\right)^{2q}$$

et en utilisant l'inégalité classique

$$|m_{j,2q-1}| \leq (m_{j,2q})^{\frac{2q-1}{2q}}$$

nous en déduisons l'inégalité

$$(18) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, |m_{j,2q-1}| \leq C(2q-1)!\, \left(\frac{4M}{R_o}\right)^{2q}$$

C étant une constante positive. De (17) et (18), on déduit immédiatement l'analycité des $f_j(z)$ dans le cercle centré à l'origine et de rayon $R_o/4M$. En utilisant les inégalités (17), (18) et l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \log|f_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [|f_j(z)| - 1] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|m_{j,p}|}{p!} z^p$$

nous obtenons la convergence uniforme de $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \log|f_j(z)|$ dans le cercle de centre l'origine et de rayon $R_o/4M$. Ceci entraîne l'analycité de $\prod_{j=1}^{\infty} [f_j(z)]^{\alpha_j}$ et donc la validité de (16) dans ce cercle.

Nous supposons maintenant que le lemme ne soit pas vrai et soit R_1 la borne supérieure des rayons des cercles centrés à l'origine où les $f_j(z)$ sont analytiques et où (16) est vérifiée. Soit v tel que $-R_1 < v < R_1$. Alors, en considérant les fonctions

$$(19) \qquad g_j(z) = \frac{f_j(z + iv)}{f_j(iv)}$$

on a pour $|z|$ assez petit la relation

$$(20) \qquad \prod_{j=1}^{\infty} [g_j(z)]^{\alpha_j} = g_0(z)$$

où $g_j(z)$ est une fonction caractéristique $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ et $g_0(z)$ est analytique et sans zéros dans un cercle de rayon $r = R_0 - R_1$ centré à l'origine. En appliquant le raisonnement précédent, on obtient que les $g_j(z)$ sont analytiques et que (16) est vérifiée dans le cercle centré à l'origine et de rayon $r/4m$ où $m = \sup_{|z| \leq R_1 + r/2} |f_0(z)|$. En remarquant que ce rayon est indépendant de v et en considérant des points v tels que $|v|$ soit arbitrairement proche de R_1 , on aboutit à une contradiction avec la définition de R_1 , ce qui démontre le lemme.

Soient maintenant $B = \{-\alpha < \text{Im } z < \beta \ ; \ \alpha > 0, \ \beta > 0\}$ la bande de convergence de $f_0(z)$ et $\varepsilon > 0$ un nombre fixé arbitrairement petit. Puisque $f_0(z)$ n'a pas de zéros imaginaires purs situés à l'intérieur de sa bande de convergence, il existe $k > 0$ tel que $f_0(z)$ n'ait pas de zéros dans le rectangle $\{|\text{Re } z| < k \ ; \ -\alpha + \varepsilon < \text{Im } z < \beta - \varepsilon\}$. Soient α_1 et β_1 les bornes supérieures respectives des α' et des β' tels que les $f_j(z)$ soient analytiques et tels que (16) soit vérifiée dans le rectangle $\{|\text{Re } z| < k \ ; \ -\alpha' < \text{Im } z < \beta'\}$. En considérant un nombre tel que $-\alpha_1 < v < \beta_1$ et en définissant les fonctions $g_j(z)$ par (19), nous obtenons la validité de (20) pour $|z|$ assez petit, les fonctions $g_j(z)$ étant des fonctions caractéristiques $(j = 0,1,2,\ldots)$ et $g_0(z)$ étant analytique et sans zéros dans un cercle centré à l'origine et de rayon $\inf(k, \beta - v - \varepsilon, \alpha - \varepsilon - v)$. Donc, d'après le lemme, les $g_j(z)$ sont analytiques $(j = 1,2,\ldots)$ et (16) est vérifiée dans ce même cercle. En prenant v assez proche de $-\alpha_1$ et de $-\beta_1$, on aboutit à une contradiction si $\alpha_1 \neq \alpha - \varepsilon$, $\beta_1 \neq \beta - \varepsilon$,

Puisque $\mathcal{E}$ est arbitraire, le théorème est démontré.

Cas n arbitraire.

Soit $y_o \in \Gamma$. Posons

$$g_j(\lambda) = f_j(\lambda y_o)$$

g_j est la fonction caractéristique de la probabilité $\tilde{P}_j$ définie par

$$\tilde{P}_j(A) = P_j\{x : x.y_o \in A\}$$

pour tout ensemble borélien A de R . Des hypothèses, on déduit l'existence d'un $\mathcal{E} > 0$ tel que

$$(21) \qquad \prod_{j=1}^{\infty} [g_j(\lambda)]^{\alpha_j} = g_o(\lambda) \qquad \lambda \in R, \ |\lambda| < \mathcal{E}$$

et que $g_o(\lambda)$ est une fonction caractéristique dans un domaine contenant la bande $0 < \text{Im } \lambda < 1$. De la validité du théorème dans le cas $n = 1$, on déduit que les $g_j(\lambda)$ sont des fonctions caractéristiques dans ce même domaine. Puisque ceci est vrai quel que soit $y_o \in \Gamma$, $f_j(z)$ est analytique dans le tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ d'après le théorème 2.2. Les autres propositions s'obtiennent de même.

On peut modifier les résultats précédents en remplaçant la fonction caractéristique $f_o(z)$ par une fonction quelconque $f_o(z)$ analytique dans un polydisque $\{|z| < R\}$. Alors, comme on le voit facilement, les résultats précédents demeurent valables avec $T = \{-R < \text{Im } z < R\}$.

De plus, comme dans le cas $n = 1$, le théorème de Mamay reste vrai si on ne suppose (16) vérifiée que pour une suite de points t_k , $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$ (voir à ce sujet [24]), nous pouvons, en utilisant ce résultat et le corollaire du théorème 2.2., obtenir le

Théorème 2.8.(6)

Soient f_o, $\{f_j\}$ et $\{a_j\}$ définis comme au théorème 2.7. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ et I_p

(6) La note [8] contient à ce sujet un résultat plus fort, mais erroné.

l'intersection des droites $\alpha\,\theta_p$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ avec Γ. Si la relation (16) est vérifiée pour n suites de points de la forme $t_{mp}\theta_p$ où t_{mp} sont des réels tels que $\lim_{m \to \infty} t_{mp} = 0$ $(p = 1, \ldots, n)$, alors les f_j sont analytiques dans un tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma'$ où Γ' est le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant les n segments I_p.

Avec Kellerer [17], nous introduisons maintenant la notion d'ensemble transcendant comme suit

Un ensemble T de $\mathbb{R}^n$ est dit transcendant s'il n'existe pas de polynôme homogène p tel que $p(t) = 0$ pour $t \in T$.

Kellerer a montré que tout ensemble transcendant T contenait une base de $\mathbb{R}^n$ et qu'il existait des ensembles transcendants dénombrables non denses dans $\mathbb{R}^n$. De plus, il a montré l'importance des ensembles transcendants pour les fonctions caractéristiques analytiques en montrant le théorème suivant :

Si f et g sont deux fonctions caractéristiques telles que

$$f(\lambda\theta) = g(\lambda\theta) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

pour tout point θ d'un ensemble transcendant T et si f est analytique, alors

$$f = g .$$

On en déduit facilement l'extension suivante du théorème de Raikov :

Théorème 2.9.

Soient f_o, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques. Si pour tout point θ d'un ensemble transcendant T, il existe une suite de nombres réels $t_{m\theta}$ tels que $\lim_{m \to \infty} t_{m\theta} = 0$ et tels que

$$f_o(t_{m\theta}\theta) = f_1(t_{m\theta}\theta)\, f_2(t_{m\theta}\theta)$$

et si f_o est une fonction caractéristique analytique dans $\mathbb{R}^n + i\Gamma$, f_1 et f_2 sont aussi analytiques dans $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ et la relation

$$f_o(t) = f_1(t)\, f_2(t)$$

est vérifiée pour $t \in \mathbb{R}^n + i\Gamma$.

V. Fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles et analytiques.

Le théorème suivant sera constamment utilisé dans la suite.

Théorème 2.8.

Soit $f(z)$ une fonction caractéristique indéfiniment divisible admettant pour $z \in \mathbb{R}^n$ la représentation (dite de Lévy - Khintchine).

$$(22) \qquad f(z) = \exp\{i\, P_1(z) - P_2(z) + \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(iz.u) - 1 - \frac{iz.u}{1+|u|^2}]\, d\mu(u)\}$$

où $P_1(z)$ est un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, $P_2(z)$ un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$ et μ une mesure positive telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{1+|u|^2}\, d\mu(u) < +\infty$$

Si $f(z)$ est analytique, elle admet la représentation (22) dans tout son tube d'analycité.

Démonstration. Soit $y_o \in \Gamma$. Posons

$$(23) \qquad g(\lambda) = f(\lambda y_o) = \exp\{i\lambda P_1(y_o) - \lambda^2 P_2(y_o) + \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(i\lambda y_o.u) - 1 - \frac{i\lambda y_o.u}{1+|u|^2}]\, d\mu(u)\}$$

De la condition

$$(24) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{1+|u|^2}\, d\mu(u) < +\infty$$

imposée à μ, on déduit la convergence de l'intégrale

$$(25) \qquad k(y_o) = \int_{\mathbb{R}^n} [\frac{1}{1+(y_o.u)^2} - \frac{1}{1+|u|^2}]\, (y_o.u)\, d\mu(u)$$

En effet, il suffit de découper $\mathbb{R}^n$ en deux ensembles A et B définis par

$$A = \{u : y_o.u) \leq |u|\} \; ; \qquad B = \{u : (y_o.u) \geq |u|\}$$

et de remarquer que sur A, on a l'inégalité

$$[\frac{1}{1+(y_o.u)^2} - \frac{1}{1+|u|^2}]\, (y_o.u) \leq \frac{1}{2} \frac{|u|^2}{1+|u|^2}$$

et sur B l'inégalité

$$\left[\frac{1}{1+|u|^2} - \frac{1}{1+(y_o.u)^2}\right](y_o.u) \leq |y_o|^3 \quad |u|^3$$

De ces deux inégalités, de la condition (24) et du fait que B est contenu dans la sphère centrée à l'origine de rayon $|y_o|$, on déduit la convergence de (25).

En posant

$$P_1(y_o) + \kappa(y_o) = \alpha$$

$$P_2(y_o) = \beta$$

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(u \mid (y_o.u) \in A) \quad \text{(A ensemble borélien de } \mathbb{R})$$

(23) s'écrit donc :

$$(26) \qquad g(\lambda) = \exp\{i\alpha\lambda - \beta\lambda^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(i\lambda t) - 1 - \frac{i\lambda t}{1+t^2}]\, d\tilde{\mu}(t)\}$$

De plus, la fonction $g(\lambda)$ est évidemment une fonction caractéristique analytique dans un domaine contenant la bande $0 < \text{Im}\ \lambda < 1$. D'après un théorème classique dans le cas d'une dimension (voir, par exemple, Linnik [20], théorème 3.4.1., p. 69) la représentation (26) est valable dans toute la bande $0 < \text{Im}\ \lambda < 1$, c'est-à-dire que $f(\lambda y_o)$ admet la représentation (22) dans toute la bande $0 < \text{Im}\ \lambda < 1$. Puisque y_o est arbitraire, ceci démontre le théorème.

CHAPITRE III

Une extension de la notion de fonction caractéristique analytique

I. Introduction.

En 1938, J. Marcinkiewicz [25] a introduit, comme généralisation des fonctions caractéristiques analytiques, les fonctions caractéristiques qui sont valeurs au bord de fonctions analytiques telles que l'axe réel soit frontière du domaine d'analycité de ces fonctions et obtenu la caractérisation suivante de cette classe de fonctions :

La fonction caractéristique $f(t)$ d'une fonction de répartition F est sur $-\Delta < t < \Delta$ la valeur au bord d'une fonction $\phi(z)$ de la variable complexe $z = t + iy$[1] holomorphe dans $\{-\Delta < t < \Delta,\ 0 < y < b\}$ si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-yx)\, dF(x)$$

converge pour $0 \leq y < b$.

De ce théorème, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Si une fonction caractéristique $f(t)$ est valeur au bord d'une fonction $\phi(z)$ holomorphe dans $-\Delta < t < \Delta,\ 0 < y < b$ $(z = t + iy)$ alors $\phi(z)$ est holomorphe dans $0 < y < b$ et $f(t)$ est valeur au bord de $\phi(z)$ pour tout t .

Ce résultat intéressant ne semble guère avoir attiré l'attention et ce n'est que très récemment qu'une étude de cette importante classe de fonctions caractéristiques a été entreprise par C. G. Esseen [14].

Nous donnons maintenant une extension de cette notion au cas des fonctions caractéristiques de plusieurs variables.

II. Définition. Propriété fondamentale.

Définition. Etant donné un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}^n$, nous dirons

(1) c'est-à-dire $\lim_{y \to 0} \phi(t + iy) = f(t)$, $\quad -\Delta < t < \Delta$

que la fonction caractéristique

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(it.x)\, dP(x) \tag{1}$$

appartient à (M_Γ) si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y.x)\, dP(x)$$

converge quel que soit $y \in \Gamma$. On peut alors définir $f(t)$ par l'intégrale de Fourier (1) pour $t \in \mathbb{R}^n + i\Gamma$.

Il est immédiat qu'on peut se restreindre (ce que nous ferons dans la suite) aux ensembles Γ vérifiant les trois propriétés suivantes :

a) Γ contient l'origine ;

b) Γ est convexe ;

c) Γ est "ouvert" dans le sens que si $y \in \Gamma$, $y \neq 0$, il existe $y_0 \in \Gamma$ et $\lambda (0 < \lambda < 1)$ tels que

$$y = \lambda\, y_0$$

Dans le cas où l'origine est un point intérieur de Γ, on retrouve la classe des fonctions caractéristiques analytiques dans le tube $\mathbb{R}^n + i\Gamma$.

Nous avons alors la propriété caractéristique suivante

Théorème 3.1.

$f(t) \in (M_\Gamma)$ si et seulement si la fonction de la variable complexe $\lambda = \mu + i\nu$ $(\mu, \nu \in \mathbb{R})$

$$f(\lambda y_0) = g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda y_0.x)\, dP(x)$$

est une fonction analytique dans la bande $0 < \nu \leq 1$ quel que soit $y_0 \in \Gamma$. $f(\mu y_0)$ est alors la valeur au bord de $g(\mu + i\nu)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si nous définissons pour $y_0 \in \Gamma$ la probabilité $\tilde{P}$ de tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{P}(A) = P\{x \mid x \in \mathbb{R}^n ;\ x.y_0 \in A\} \tag{2}$$

nous avons

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp[i\lambda y_o . x]\ dP(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda u)\ d\tilde{P}(u)$$

La fonction $g(\lambda)$ est donc la fonction caractéristique de la probabilité $\tilde{P}$ et on obtient le théorème en appliquant à $g(\lambda)$ le théorème de Marcinkiewicz cité dans l'introduction.

III. Théorème de décomposition.

Théorème 3.2.

Soient f_o, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques. Si

$$f_o(t) = f_1(t)\ f_2(t) \qquad t \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

et si $f_o \in (M_\Gamma)$, alors $f_m \in (M_\Gamma)$ $(m = 1, 2)$ et la relation (3) est valable dans tout $\mathbb{R}^n + i\Gamma$.

Démonstration. De (3), on déduit que

$$P_o = P_1 * P_2 \tag{4}$$

P_o, P_1, P_2 étant les probabilités associées respectivement à f_o, f_1, f_2. Etant donné $y_o \in \Gamma$, on peut définir, d'après (2), des probabilités $\tilde{P}_m$ associées à P_m $(m = 0, 1, 2)$. Nous avons alors

$$\tilde{P}_o = \tilde{P}_1 * \tilde{P}_2 \tag{5}$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda u)\ d\tilde{P}_o(u)$$

converge pour $0 \leq \lambda \leq 1$. On déduit alors de (5) et d'un résultat classique (voir, par exemple, Loève, [21], p. 214) la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda u)\ d\tilde{P}_m(u) - \qquad (m = 1, 2)$$

pour $0 \leq \lambda \leq 1$, ce qui entraîne, puisque y_o est arbitraire, que $f_m \in (M_\Gamma)$. La validité de (3) dans tout $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ se déduit alors immédiatement de (4).

IV. Probabilités limitées.

Définition. Etant donné un vecteur θ de $\mathbb{R}^n$ de module 1, $\mathbb{R}^n$

étant muni de la métrique hermitienne habituelle, nous disons qu'une probabilité P est limitée dans la direction θ de $\mathbb{R}^n$ s'il existe m réel tel que

$$P\{x \mid x.\theta > m\} = 0$$

Nous appelons extrémité de P dans la direction θ (que nous noterons $ext_\theta(P)$) la borne inférieure des m ainsi définis.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 3.3.

P est limitée dans la direction θ si et seulement si la fonction caractéristique f de P vérifie les deux conditions suivantes :

a) $f \in M_\Gamma$ pour $\Gamma = \{-\lambda\theta \; ; \; \lambda \geq 0\}$

b) il existe c réel tel que

$$f(-i\lambda\theta) \leq \exp(c\lambda) \qquad \lambda \geq 0$$

On a alors

$$ext_\theta(P) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log[f(-i\lambda\theta)]$$

Démonstration. Nécessité. Posons pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}$:

$$P(A) = P\{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \; x.\theta \in A\}$$

Nous avons alors pour $\lambda \geq 0$

$$(6) \qquad f(-i\lambda\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\lambda\theta.x) \, dP(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda u) \, d\tilde{P}(u)$$
$$= \int_{-\infty}^{m} \exp(\lambda u) \, d\tilde{P}(u) \leq \exp(\lambda m)$$

Donc, si P est limitée, f vérifie bien a) et b). De plus, si nous posons,

$$h = \limsup_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log[f(-i\lambda\theta)]$$

nous avons immédiatement de (6) la relation

$$(7) \qquad ext_\theta(P) \geq h$$

Suffisance. Soit f une fonction caractéristique vérifiant a).

Alors, avec les notations ci-dessus, nous avons pour $\lambda \geq 0$

$$(8) \qquad f(-i\lambda\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\lambda\theta.x)\, dP(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda u)\, d\tilde{P}(u)$$
$$\geq \int_a^b \exp(\lambda u)\, d\tilde{P}(u) \geq \exp(a\lambda)\, \tilde{P}(a \leq u \leq b)$$

Si f vérifie b), en définissant h comme précédemment, nous avons

$$(9) \qquad f(-i\lambda\theta) \leq \exp[(h + \varepsilon)\lambda] \qquad (\lambda \to +\infty)$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. En comparant (8) et (9), nous obtenons

$$(10) \qquad \tilde{P}[a \leq u \leq b] \exp(a\lambda) \leq \exp[(h + \varepsilon)\lambda] \qquad (\lambda \to +\infty)$$

et si $a > h + \varepsilon$, ceci entraîne que

$$\tilde{P}[a \leq u \leq b] = 0$$

quel que soit b et par conséquent que P est limitée dans la direction θ . De plus de (10) on obtient

$$\mathrm{ext}_\theta (P) \leq h$$

ce qui, avec (7), donne

$$\mathrm{ext}_\theta (P) = h$$

Pour achever la démonstration du théorème, il faut encore vérifier que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log [f(-i\lambda\theta)]$$

existe, mais comme l'a remarqué Ramachandran [34], la convexité de $\log[f(-i\lambda\theta)]$ entraîne la croissance de $\frac{1}{\lambda} \log [f(-i\lambda\theta)]$ et par conséquent l'existence de cette limite.

Remarques 1. Dans le cas $n = 1$, on a deux directions $\theta = +1$ et $\theta = -1$, la première donne l'extrémité à droite, la deuxième l'extrémité à gauche de P telles qu'elles sont définies chez Lukacs [22].

2. Dans le cas où P est limitée dans toutes les directions (c'est-à-dire où P est à support compact), on retrouve le théorème classique de Plancherel et Pólya sous une forme un peu plus forte que la forme habituelle, ceci étant dû au fait que P est

une mesure positive (2).

De ce théorème et du théorème 3.2., on déduit presque immédiatement le

Corollaire 1.

Soient P_o, P_1, P_2 des probabilités définies sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$P_o = P_1 * P_2$$

Si P_o est limitée dans la direction θ, il en est de même de P_m $(m = 1, 2)$ et on a la relation

$$ext_\theta (P_o) = ext_\theta(P_1) + ext_\theta(P_2)$$

Dans le cas particulier où f_o est analytique, on a de même en utilisant les théorèmes 2.6. et 2.7. le

Corollaire 2.

Soient f_o, f_j des fonctions caractéristiques et α_j des nombres positifs vérifiant l'une des deux conditions

a) $j = 1, \ldots, p$

b) $j = 1, 2, \ldots$ et $\alpha_j \geq \varepsilon_o > 0$

Si pour $t \in \mathbb{R}^n$, $|t|$ assez petit, on a

$$\prod_j [f_j(t)]^{\alpha_j} = f_o(t)$$

et si f_o est une fonction caractéristique analytique correspondant à une probabilité P_o limitée dans la direction θ, alors les f_j correspondent à des probabilités P_j limitées dans la direction θ et

$$ext_\theta (P_o) = \sum_j \alpha_j \, ext_\theta (P_j)$$

Un cas particulier intéressant est celui des probabilités ayant pour support un cône C de $\mathbb{R}^n$ issu de l'origine, c'est-à-dire les probabilités P telles que

$$P\{x : x \in C\} = 1$$

(2) On peut trouver un résultat assez semblable dans un séminaire de Zerner à l'école Polytechnique intitulé "Les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles et leurs valeurs au bord."

Nous disons alors qu'une probabilité P est plus grande que k ($k \in \mathbb{R}^n$) si la probabilité P' définie pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}^n$ par

$$P'(A) = P(A - k)$$

a pour support C (autrement dit P a pour support un cône "parallèle" à C de sommet k). En remarquant qu'une probabilité P a pour support un cône C si et seulement si cette probabilité est limitée dans la direction $-\theta$ (avec $\text{ext}_{-\theta}(P) = 0$) pour toute direction $\theta \in C$ (il suffit pour cela qu'elle soit limitée dans toutes les directions opposées aux directions extrémales du cône), nous avons alors presque immédiatement le

Corollaire 3.

Soient P_o, P_1, P_2 des probabilités définies sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$P_o = P_1 * P_2$$

et C un cône de $\mathbb{R}^n$ issu de l'origine. Si P_o est plus grande que k_o , il existe $k_m \in \mathbb{R}^n$ tel que P_m soit plus grande que k_m (m = 1, 2).

Dans le cas particulier où $C = \{x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$, on peut prendre

$$k_m = (k_{m1}, \ldots, k_{mn}) \qquad (m = 0, 1, 2)$$

avec

$$k_{mj} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} f_m(i\lambda\theta_j)$$

f_m désignant la fonction caractéristique associée à P_m et θ_j étant le vecteur unitaire de l'axe des x_j , et nous avons alors

$$k_o = k_1 + k_2$$

Ce corollaire nous servira au chapitre VIII.

V. Fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles.

Théorème 3.4.

Soit f une fonction caractéristique indéfiniment divisible admettant pour $t \in \mathbb{R}^n$ la représentation de Lévy-Khintchine

$$(11) \qquad f(t) = \exp\Big\{ i\, P_1(t) - P_2(t) + \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\exp(it.u) - 1 - \frac{it.u}{1+|u|^2}\Big] d\mu(u)\Big\}$$

où P_1, P_2, μ vérifient les conditions habituelles. Si $f \in (M_\Gamma)$, alors la représentation (11) est valable dans tout $\mathbb{R}^n + i\Gamma$.

Démonstration. Ce théorème se déduit du cas $n = 1$ (Esseen [14], théorème 2) exactement comme nous avons déduit le théorème 2.9. du théorème 3.4.1. de Linnik.

Du théorème 3 d'Esseen [14], on déduit par le même raisonnement le

Théorème 3.5.

Pour que la probabilité P d'une fonction caractéristique indéfiniment divisible admettant la représentation de Lévy-Khintchine (11) soit bornée dans la direction θ, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées

(1) $P_2(\theta) = 0$

(2) $\mu(u \mid (\theta.u) > 0) = 0$

(3) $\int_{\{|\theta.u| \leq 1\}} (\theta.u)\, d\mu(u) < +\infty$

Si les conditions précédentes sont vérifiées, on a

$$\mathrm{ext}_\theta\,(P) = P_1(\theta) - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta.u}{1+|u|^2}\, d\mu(u)$$

Des remarques du paragraphe 4, on déduit le

Corollaire.

Etant donnés un cône C issu de l'origine et la probabilité P d'une fonction caractéristique indéfiniment divisible f admettant la représentation (11), il existe $k \in \mathbb{R}^n$ tel que P soit plus grande que k si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $P_2(\theta) = 0 \qquad (\theta \in C)$

(2) μ a pour support C

(3) $\int_{\{|\theta.u| \leq 1\}} (\theta.u)\, d\mu(u) < +\infty \qquad (\theta \in C)$

Dans le cas particulier où $C = \{x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$, on peut remplacer (1) et (3) par

(1') $P_2 \equiv 0$

(3') $\sum_{j=1}^{n} \int_{\{|\theta_j . u| \leq 1\}} (\theta_j . u)\, d\mu(u) < +\infty$

où θ_j est le vecteur unitaire de l'axe des x_j . Les coordonnées k_j de k sont alors données par

$$k_j = P_1(\theta_j) - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta_j . u}{1 + |u|^2}\, d\mu(u)$$

CHAPITRE IV

Décomposition du produit d'une loi normale par une loi de Poisson

I. Introduction.

Dans ce chapitre, nous désirons donner l'extension au cas des fonctions caractéristiques à n variables du théorème suivant de Linnik ([20], théorème 7.1.1.).

Si f_0, f_1, f_2 sont des fonctions caractéristiques telles que

$$f_0(t) = f_1(t)\, f_2(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

et si f_0 est le produit d'une fonction caractéristique de loi normale par une fonction caractéristique de loi de Poisson, alors f_j est aussi le produit d'une fonction caractéristique normale par une fonction caractéristique de Poisson $(j = 1, 2)$.

Pour ceci, nous introduisons la définition suivante :

Définition. Une fonction $\phi(z)$ à valeurs complexes des n variables complexes $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction à crête si elle est entière et si elle vérifie l'inégalité :

$$|\phi(z)| \leq \phi(\mathrm{Re}\ z) \qquad z \in \mathbb{C}^n$$

Si $\phi(z) \neq 0$, cette inégalité est équivalente à :

$$\psi(x,y) = \log \left| \frac{\phi(x + iy)}{\phi(x)} \right| \leq 0 \qquad z = x + iy\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

Cette définition modifie légèrement celle donnée par Linnik ([20], § 3.2.) dans le cas $n = 1$ puisqu'il définit une fonction à crête par l'inégalité

$$|\phi(z)| \leq \phi(\mathrm{Im}\ z)$$

On passe évidemment de l'une à l'autre par le changement $z \to iz$. La convention adoptée ici nous permettra d'utiliser dans nos démonstrations des quantités réelles au lieu de quantités imaginaires pures.

Avec cette définition, le corollaire 1 du théorème 2.1. nous

permet d'affirmer que si $f(z)$ est une fonction caractéristique entière, $f(iz)$ est une fonction à crête et, d'après lè théorème de Raikov, tout facteur (au sens de la décomposition des fonctions caractéristiques) $g(z)$ de $f(z)$ est tel que $g(iz)$ est aussi une fonction à crête. De plus, comme il est implicite chez Linnik [20] et comme l'a remarqué explicitement Ostrovskiy [29] dans sa démonstration simplifiée du théorème de Linnik énoncé ci-dessus, ce théorème peut, en réalité, être énoncé pour des fonctions à crête quelconques et il prend la forme suivante :

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête d'une variable complexe z telles que :

$$\phi_1(z)\ \phi_2(z) = \exp\{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \lambda e^z\}$$

où α et β sont des constantes réelles, γ et λ des constantes positives ou nulles, alors :

$$\phi_m(z) = \exp\{a_m + b_m z + c_m z^2 + l_m e^z\} \qquad (m = 1, 2)$$

où a_m et b_m sont des constantes réelles, c_m et l_m des constantes positives ou nulles.

C'est ce dernier théorème que nous généraliserons maintenant au cas de n variables.

II. Enoncé et démonstration du théorème.

Théorème 4.1.

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ telles que

$$(1) \qquad \phi_1(z)\ \phi_2(z) = \exp\{\alpha + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \sum_{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n)\}$$

où α est une constante réelle, $\Pi_1(z)$ est un polynôme homogène du premier degré en z à coefficients réels, $\Pi_2(z)$ est un polynôme homogène du second degré en z positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$,

les λ sont des constantes positives ou nulles, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 $(j = 1, \ldots, n)$ et où $\sum_{\varepsilon}$ indique une sommation sur les 2^n-1 valeurs de $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ $(\varepsilon \neq (0, \ldots, 0))$. Alors

$$(2) \qquad \phi_1(z) = \exp\{a + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{\varepsilon} l_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n)\}$$

où a, P_1, P_2 et les l ont respectivement les mêmes propriétés que α, Π_1, Π_2 et les λ (on a évidemment une formule analogue pour ϕ_2).

Démonstration. Nous remarquons d'abord que si $\phi_1(z)$ est une fonction à crête admettant une représentation (2) avec a et les l réels et $P_1(z)$, $P_2(z)$ des polynômes homogènes de degrés respectifs 1 et 2 à coefficients réels, alors les l sont positifs ou nuls et $P_2(z)$ est positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$.
En effet, nous avons en posant :

$$\psi_1(x,y) = \log \left| \frac{\phi_1(x + iy)}{\phi_1(x)} \right| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi_1(x,y) = -P_2(y) + \sum_{\varepsilon} l_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n) [\cos(\varepsilon_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_n y_n) - 1]$$

S'il existait un $y^\circ \in \mathbb{R}^n$ tel que $P_2(y^\circ) < 0$, alors, puisque P_2 est homogène de degré 2, nous aurions pour x° fixé

$$\lim_{m \to \infty} \psi_1(x^\circ, m\, y^\circ) = +\infty$$

ce qui contredirait la propriété de crête. Donc $P_2(z)$ est positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$.

De plus, en faisant $y_j = \Pi$, $y_k = 0 (k \neq j)$, nous obtenons

$$\psi_1(x,y) = -P_2(y) - 2 \sum_{\varepsilon}' l_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)$$

où la sommation $\sum_{\varepsilon}'$ indique une sommation sur les ε tels que $\varepsilon_j = 1$.

Si $l_{1\ldots n}$ était négatif, alors en faisant $x_1 = \ldots = x_n = \chi \to +\infty$, on obtiendrait $\psi_1(x,y) \to +\infty$, ce qui contredit la pro-

priété de crête. De même s'il y avait un $l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ négatif avec $\varepsilon_j = 1$, alors en faisant $x_k = \chi$ si $\varepsilon_k = 1$ et $x_k = -\chi$ si $\varepsilon_k = 0$ et en faisant $\chi \to +\infty$, on obtiendrait $\psi_1(x,y) \to +\infty$, ce qui est de nouveau contradictoire. Donc tous les l_ε avec $\varepsilon_j = 1$ sont positifs ou nuls et puisque j est arbitraire, ceci veut dire que tous les l sont positifs ou nuls.

Nous démontrons maintenant que $\phi_1(z)$ admet la représentation (2) par récurrence sur le nombre n de variables. Ceci est vrai pour $n = 1$ (théorème 7.1.1. de Linnik [20]). Nous le supposons vrai jusqu'à $n-1$ et le montrerons pour n en supposant de plus $n > 3$ (nous traiterons à part les cas $n = 2$ et $n = 3$). Nous utiliserons le lemme bien connu suivant :

Lemme.

Les fonctions $z_1^{a_1} \ldots z_n^{a_n} \exp(\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n)$ où $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et où les a_j sont des entiers positifs ou nuls tels que $0 \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \leq 4$ sont linéairement indépendantes.

Nous fixons z_1 réel et en remarquant que $\phi_m(z)$ $(m = 1, 2)$ est alors une fonction à crête de $(z_2, \ldots, z_n)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons alors :

$$(3) \qquad \phi_1(z) = \exp\{b + Q_1(z_2, \ldots, z_n) + Q_2(z_2, \ldots, z_n) + \sum_{\varepsilon'} m_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n} \exp(\varepsilon_2 z_2 + \ldots + \varepsilon_n z_n)\}$$

où $\sum_{\varepsilon'}$ indique la sommation sur les $2^{n-1}-1$ valeurs de $\varepsilon' = (\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et où b, les m et les coefficients de Q_1 et Q_2 sont des fonctions de z_1 réelles pour z_1 réel. Nous fixons maintenant $z_2, \ldots, z_n$ réels. Du fait que $\phi_m(z)$ $(m = 1,2)$ est alors une fonction à crête en z_1, en appliquant le théorème de Linnik, nous obtenons :

$$(4) \qquad \phi_1(z) = \exp\{A + B z_1 + C z_1^2 + \Lambda \exp(z_1)\}$$

A, B, C, Λ étant des fonctions de $(z_2, \ldots, z_n)$ réelles pour

$z_2, \ldots, z_n$ réels. En comparant (3) et (4), nous obtenons l'équation

$$(5) \qquad b + Q_1(z_2,\ldots,z_n) + Q_2(z_2,\ldots,z_n) + \sum_{\mathcal{E}} m_{\mathcal{E}_2,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_2 z_2 + \ldots + \mathcal{E}_n z_n) = A + B z_1 + C z_1^2 + \Lambda \exp(z_1)$$

à N inconnues : b, les m et les coefficients de Q_1 et Q_2. Si on se donne N valeurs de $(z_2, \ldots, z_n)$, on obtient à partir de (5) un système de N équations linéaires à N inconnues et, d'après le lemme, on peut choisir ces N valeurs de manière que ce système soit résoluble. La résolution du système donne alors pour toutes les inconnues la forme

$$\rho + \sigma z_1 + \tau z_1^2 + \mu \exp(z_1)$$

ρ, σ, τ et μ étant des constantes réelles. En regroupant les différents termes, nous obtenons la représentation

$$(6) \qquad \phi_1(z) = \exp\Big\{a + P_1(z) + P_2(z) + P_3(z) + P_4(z) + \sum_{\mathcal{E}} l_{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n z_n) + \exp(z_1)\, R_2(z_2,\ldots,z_n) + \sum_{\mathcal{E}} (\gamma_{\mathcal{E}_2,\ldots,\mathcal{E}_n} z_1 + \delta_{\mathcal{E}_2,\ldots,\mathcal{E}_n} z_1^2) \exp(\mathcal{E}_2 z_2 + \ldots + \mathcal{E}_n z_n)\Big\}$$

Dans cette représentation, les constantes a, l, γ, δ sont des constantes réelles ; $P_j(z)$ est un polynôme homogène de degré j (j = 1, 2, 3, 4) et R_2 un polynôme de degré 2 sans terme constant. De plus

$$P_3(z) = \sum_{j=2} (r_j z_1^2 z_j + s_j z_j^2 z_1) + \sum_{\substack{j<k;\, j=2,\ldots,n-1 \\ k=3,\ldots,n}} r_{jk} z_1 z_j z_k$$

$$P_4(z) = \sum_{j=2}^{n} t_j z_1^2 z_j^2 + \sum_{\substack{j<k;\, j=2,\ldots,n-1 \\ k=3,\ldots,n}} t_{jk} z_1^2 z_j z_k$$

Nous démontrons maintenant la nullité des polynômes P_3, P_4, R_1 et R_2 et des constantes γ et δ. Pour cela nous considérons comme seules variables z_1 et z_j (les autres étant fixées réelles) ; comme $\phi_m(z)$ (m = 1, 2) est une fonction à crête de (z_1, z_j),

nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence (nous avons supposé $n > 3$). En appliquant le lemme, nous obtenons la nullité des $\gamma_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}$ et $\delta_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}$ pour lesquels $\varepsilon_j = 1$, des constantes r_j, s_j, t_j, t_{jk} et des coefficients de z_j, z_j^2, et $z_j z_k$ dans R_2. Puisque j est arbitraire, nous montrons ainsi la nullité de tous les produits de polynômes par des exponentielles et la nullité de P_4. De plus, P_3 a la forme

$$P_3(z) = \sum_{\substack{j<k;\, j=2,\ldots,n-1 \\ k=3,\ldots,n}} r_{jk}\, z_1\, z_j\, z_k$$

Pour démontrer la nullité de P_3, nous considérons comme seules variables z_1, z_j, z_k (les autres étant fixées réelles) et obtenons alors $\phi_m(z)$ ($m = 1, 2$) comme fonctions à crête de (z_1, z_j, z_k). Comme on a supposé $n > 3$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et le lemme, ce qui donne la nullité de r_{jk}. Comme j et k sont arbitraires, $P_3(z) = 0$. Nous avons démontré la représentation (2).

Cas $n = 2$. Dans ce cas, la méthode générale nous mène à la représentation (6) que nous pouvons écrire sous la forme

$$\begin{aligned}(7)\qquad \phi_1(z) = \exp\{a + P_1(z) + P_2(z) + r\, z_1^2 z_2 + s\, z_2^2 z_1 + t\, z_1^2 z_2^2 \\ + l_{10}\exp(z_1) + l_{01}\exp(z_2) + l_{11}\exp(z_1+z_2) \\ + (c_1 z_1 + d_1 z_1^2)\exp(z_2) + (c_2 z_2 + d_2 z_2^2)\exp(z_1)\}\end{aligned}$$

Nous faisons $z_1 = -z_2 = \eta$. Alors, en posant $\phi_m(\eta, -\eta) = f_m(\eta)$ ($m = 1, 2$), nous remarquons que les $f_m(\eta)$ sont des fonctions à crête de η telles que

$$f_1(\eta)\, f_2(\eta) = \exp\{\rho + \sigma\eta + \tau\eta^2 + \mu_1 \exp(\eta) + \mu_2 \exp(-\eta)\}$$

où ρ et σ sont des constantes réelles, τ, μ_1, μ_2 des constantes positives ou nulles. Or, dans ce cas qui est un cas particulier d'un théorème de Linnik ([20], théorème 9.0.1.), nous avons

$$f_1(\eta) = \exp\{\rho' + \sigma'\eta + \tau'\eta^2 + \mu_1' \exp(\eta) + \mu_2' \exp(-\eta)\}$$

En comparant ceci à (7) et en utilisant le lemme, nous obtenons

$$c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = t = 0$$
$$r - s = 0$$

Nous faisons maintenant $z_1 = z_2 = \zeta$. Alors, en posant $\phi_m(\zeta, \zeta) = g_m(\zeta)$ $(m = 1, 2)$, les $g_m(\zeta)$ sont des fonctions à crête de ζ telles que

$$g_1(\zeta)\, g_2(\zeta) = \exp\{\alpha + \beta\zeta + \gamma\zeta^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\exp(\zeta) + \lambda_{12}\exp(2\zeta)\}$$

Or, ce cas est de nouveau un cas particulier du théorème 9.0.1. de Linnik [20] et nous avons alors

$$g_1(\zeta) = \exp\{\alpha' + \beta'\zeta + \gamma'\zeta^2 + \nu_1' \exp(\zeta) + \nu_2' \exp(2\zeta)\}$$

ce qui, comparé à (7) donne

$$r + s = 0$$

Le théorème est complètement démontré dans ce cas.

Cas $n = 3$. Le raisonnement général conduit à la forme

$$(8) \qquad \phi_1(z) = \exp\{a + P_1(z) + P_2(z) + r\, z_1z_2z_3 + \sum_{\varepsilon} l_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \exp(\varepsilon_1z_1 + \varepsilon_2z_2 + \varepsilon_3z_3)\}$$

Nous faisons alors $z_1 = z_2 = -z_3 = \xi$. En posant $\phi_m(\xi, \xi, -\xi) = \theta_m(\xi)$, les θ_m sont des fonctions à crête telles que

$$\theta_1(\xi)\, \theta_2(\xi) = \exp\{(\alpha + \lambda_{101} + \lambda_{011}) + \delta\xi + \varepsilon\xi^2 + (\lambda_{100} + \lambda_{010} + \lambda_{111}) \exp(\xi) + \lambda_{110} \exp(2\xi) + \lambda_{001} \exp(-\xi)\}$$

Ceci est encore un cas particulier du théorème 9.0.1. de [20] qui donne, comparé à (8), $r = 0$. Le théorème est complètement démontré.

III. Applications.

D'après les remarques faites au paragraphe 1, le théorème 4.1. s'applique en particulier aux fonctions caractéristiques et donne le

Théorème 4.2.

Soient f_o, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques telles que

(9) $\qquad f_o(t) = f_1(t)\, f_2(t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}^n$

Si $f_o(t)$ est le produit d'une fonction caractéristique de loi normale (à n variables) et d'une fonction caractéristique de loi de Poisson (à n variables), alors $f_m(t)$ est aussi le produit d'une fonction caractéristique normale et d'une fonction caractéristique de Poisson ($m = 1, 2$).

Démonstration. On a alors

$$f_o(t) = \exp\{i\, P_1(t) - P_2(t) + \sum_{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} [\exp(i\, \varepsilon_1 t_1 + \ldots + i\varepsilon_n t_n) - 1]\}$$

où $\sum_{\varepsilon}$ a la même signification que dans le théorème précédent et où P_1 est un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, P_2 un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour t réel, les λ sont positifs ou nuls. $f_o(t)$ est donc une fonction caractéristique entière et, d'après le théorème de Raikov, $f_m(t)$ est aussi une fonction caractéristique entière et (9) est vérifié dans tout l'espace $\mathbb{C}^n$. En posant $\phi_m(t) = f_m(it)$ ($m = 0, 1, 2$), on est ramené au théorème 4.1., d'où l'on déduit notre résultat en tenant compte du fait que $\phi_m(0) = 1$ ($m = 0, 1, 2$).

Remarque. Le cas particulier où les λ sont tous nuls redonne le théorème de Cramer [2] et le cas où $P_2 \equiv 0$ redonne le théorème de Teicher [37].

De même, on a le

Théorème 4.3.

Soient $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\{f_j(t)\}$ une suite de fonctions caractéristiques et $\{a_j\}$ une suite de nombres positifs vérifiant l'une des deux conditions

a) $j = 1, \ldots, p$

b) il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que $a_j \geq \varepsilon_o$ ($j = 1, 2, \ldots$).

Si la relation

(10) $\prod_j [f_j(t)]^{\alpha_j} = f_o(t)$

est vérifiée pour $t \in \mathbb{R}^n$ où $f_o(t)$ est le produit d'une fonction caractéristique normale par une fonction caractéristique de Poisson, alors $f_j(t)$ est aussi le produit d'une fonction caractéristique normale par une fonction caractéristique de Poisson.

Démonstration. $f_o(t)$ a alors la forme donnée au théorème précédent et est donc une fonction entière sans zéros. D'après le théorème 2.6. dans le cas a) et le théorème 2.7. dans le cas b), $f_j(t)$ est aussi une fonction entière sans zéros ($j = 1, 2, \ldots$) et la relation (10) est vérifiée dans tout l'espace $\mathbb{C}^n$. On en déduit facilement que $\prod_{k \neq j} [f_k(t)]^{\alpha_j}$ est aussi une fonction entière. En posant $\phi_1(t) = f_j(it)$, $\phi_2(t) = \prod_{k \neq j} [f_k(t)]^{\alpha_k}$, on obtient ainsi deux fonctions à crête auxquelles s'applique le théorème 4.1., ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE V

Décomposition des lois indéfiniment divisibles ayant un spectre de Poisson fini.

I. Introduction.

Nous généralisons maintenant les résultats du chapitre précédent au cas du produit d'une loi normale par p lois de Poisson. Dans le cas d'une variable, Linnik a démontré le théorème suivant (théorème 9.0.1. de [20]) dont nous nous sommes d'ailleurs servis pour les cas $n = 2$ et $n = 3$ du chapitre précédent.

Si f est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible dont le spectre de Poisson se compose d'un nombre fini p de points réels $\{a_j\}$ tels que si a_j et a_k sont de même signe $(k > j)$, alors a_k/a_j est un entier plus grand que un, alors tout facteur de f est indéfiniment divisible.

Enoncé en termes de fonctions à crête, ce théorème (qui reste valable dans ce cas plus général) devient

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de la variable complexe z telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\beta + \gamma z + \delta z^2 + \sum_{m=1}^{p} [\lambda_m \exp(a_m z)]\}$$

où β et γ sont des constantes réelles, δ et les λ des constantes positives ou nulles et $\{a_m\}$ un ensemble de p points réels tels que si a_j et a_k sont de même signe $(k > j)$, a_k/a_j est un entier plus grand que 1. Alors

$$\phi_1(z) = \exp\{b + cz + dz^2 + \sum_{m=1}^{p} l_m \exp(a_m z)\}$$

où b, c, d et les l ont respectivement les mêmes propriétés que β, γ, δ et les λ (on a une représentation analogue pour ϕ_2).

C'est ce dernier théorème que nous étendrons au cas de n variables. La démonstration sera, quant aux idées générales, assez

semblable à celle du théorème 4.1. et par conséquent l'étude du cas $n = 2$ sera pour nous fondamentale. Cette étude sera faite au paragraphe 2. Nous démontrerons le cas général au paragraphe 3 et donnerons les applications aux fonctions caractéristiques au paragraphe 4. Enfin, dans un cinquième paragraphe, nous indiquerons par un exemple simple que les conditions imposées aux points du spectre ne sont pas nécessaires pour $n \geq 2$.

II. Le cas $n = 2$.

Théorème 5.1.

Soient $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $(a_1, \ldots, a_p)$ une suite de nombres réels telle que si a_j est positif (resp. négatif) et si a_k est positif (resp. négatif) avec $k > j$, alors a_k/a_j est un entier plus grand que un et $(b_1, \ldots, b_p)$ une deuxième suite de nombres réels ayant la même propriété. Si $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ sont deux fonctions à crête de z telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\gamma + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \sum_{j=1}^{p} [\lambda_j \exp(a_j z_1) + \mu_j \exp(b_j z_2) + \nu_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où γ est une constante réelle, les λ, μ, ν sont des constantes positives ou nulles, $\Pi_1(z)$ un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, $\Pi_2(z)$ un polynôme homogène du second degré à coefficients réels, positif ou nul pour z_1 et z_2 réels, alors

$$\phi_1(z) = \exp\{c + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{j=1}^{p} [l_j \exp(a_j z_1) + m_j \exp(b_j z_2) + n_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où c, P_1, P_2 les l, m, n ont respectivement les mêmes prorpiétés que γ, Π_1 Π_2 les λ, μ, ν (on a évidemment une représentation analogue pour ϕ_2).

Démonstration. En fixant successivement z_1 réel, puis z_2 réel et en remarquant que dans les deux cas le théorème de Linnik s'ap-

plique, nous obtenons pour $\phi_1(z)$ les deux représentations

$$\phi_1(z) = \exp\{\xi + \eta\, z_2 + \zeta\, z_2^2 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \exp(b_j\, z_2)\}$$

où ξ, μ, ζ et les θ_j sont des fonctions de z_1 réelles pour z_1 réel et

$$\phi_1(z) = \exp\{\rho + \sigma\, z_1 + \tau\, z_1^2 + \sum_{k=1}^{p} \omega_k \exp(a_k\, z_1)\}$$

où ρ, σ, τ et les ω_k sont des fonctions de z_2 réelles pour z_2 réel, ce qui donne l'équation

$$\xi + \eta\, z_2 + \zeta\, z_2^2 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \exp(b_j\, z_2) = \rho + \sigma\, z_1 + \tau\, z_1^2 + \sum_{k=1}^{p} \omega_k \exp(a_k\, z_1)$$

que l'on peut résoudre par rapport aux $p+3$ inconnues ξ, η, ζ, θ_j en prenant $p+3$ valeurs particulières de z_2 de manière à obtenir un système résoluble de $p+3$ équations linéaires à $p+3$ inconnues, d'où l'on obtient que les inconnues ξ, η, ζ, θ_j ont toutes la forme

$$A + B\, z_1 + C\, z_1^2 + \sum_{k=1}^{p} D_k \exp(a_k\, z_1)$$

A, B, C, D_k étant des constantes réelles. En regroupant les différents termes ainsi obtenus, nous obtenons la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{c + P_1(z) + P_2(z) + s_1\, z_1^2\, z_2 + s_2\, z_2^2\, z_1 + t\, z_1^2\, z_2^2 + \sum_{j=1}^{p} [(l_j + \alpha_j\, z_2 + \beta_j\, z_2^2) \exp(a_j\, z_1) + (m_j + \gamma_j\, z_1 + \delta_j\, z_1^2) \exp(b_j\, z_2)] + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} [n_{jk} \exp(a_j\, z_1 + b_k\, z_2)]\}$$

où les constantes c, s_1, s_2, t, l_j, m_j, n_{jk}, α_j, β_j, γ_j, δ_j sont réelles et où P_1 et P_2 sont des polynômes homogènes de degrés respectifs 1 et 2 à coefficients réels.

Posons

$$\psi_1(x,y) = \log \left| \frac{\phi_1(x + iy)}{\phi_1(x)} \right| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Par un calcul simple, nous obtenons

$$\psi_1(x,y) = -P_2(y) - s_1(y_1^2 x_2 + 2x_1 y_1 y_2) - s_2(y_2^2 x_1 + 2x_2 y_1 y_2)$$
$$-t(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + 4x_1 x_2 y_1 y_2 - y_1^2 y_2^2)$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} [\exp(a_j x_1)\{(l_j + \alpha_j x_2 + \beta_j x_2^2)[\cos(a_j y_1) - 1]$$
$$-\beta_j y_2^2 \cos(a_j y_1) - (\alpha_j y_2 + 2\beta_j x_2 y_2) \sin(a_j y_1)\}$$
$$+ \exp(b_j x_2)\{(m_j + \gamma_j x_1 + \delta_j x_1^2)[\cos(b_j y_2) - 1]$$
$$-\delta_j y_1^2 \cos(b_j y_2) - (\gamma_j y_1 + 2\delta_j x_1 y_1) \sin(b_j y_2)\}]$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} n_{jk} \exp(a_j x_1 + b_k x_2)[\cos(a_j y_1 + b_k y_2) - 1]$$

Nous montrons d'abord la nullité de s_1, s_2, t, α_j, β_j, γ_j, δ_j et des n_{jk} pour $j \neq k$. Pour cela, il suffit de montrer qu'ils doivent avoir un signe déterminé en utilisant le fait que $\psi_1(x,y) \leq 0$. En effet, s'ils ont un signe déterminé, les termes correspondants dans $\phi_2(z)$ ont le même et leur somme doit être nulle.

En faisant $y_1 = y_2 \to +\infty$, nous obtenons immédiatement $t \leq 0$ (et donc $t = 0$). Nous faisons maintenant $y_1 = 0$ et en posant $P_2(z) = q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_{12} z_1 z_2$, nous obtenons

$$\psi_1(x,y) = -q_2 y_2^2 - s_2 y_2^2 x_1 + \sum_{j=1}^{p} \{\exp(b_j x_2)$$
$$[\cos(b_j y_2) - 1](m_j + \gamma_j x_1 + \delta_j x_1^2) - \beta_j y_2^2 \exp(a_j x_1)\}$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} n_{jk} [\cos(b_k y_2) - 1] \exp(a_j x_1 + b_k x_2)$$

Le coefficient de y_2^2 qui doit être négatif ou nul est

$$-q_2 - s_2 x_1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \exp(a_j x_1)$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\beta_j = s_2 = 0$$

Le cas symétrique $y_2 = 0$ donne de même

$$\delta_j = s_1 = 0$$

Considérons le coefficient de $\exp(b_j x_2)$. En faisant $y_1 = 0$ $y_2 = 2\Pi/b_m$ où m est le plus petit indice plus grand que j tel que b_j et b_m aient le même signe (rappelons que, de deux b_j de même signe, l'un est multiple de l'autre), on voit qu'il doit

être négatif ou nul (sinon en faisant $(\text{sgn } b_j)\, x_2 \to +\infty$, ceci donnerait $\psi_1(x,y) \to +\infty$, ce qui est impossible). Or ce coefficient est de la forme

$$[\cos(b_j\, y_2) - 1][m_j + \gamma_j\, x_1 + \sum_{k=1}^{n} n_{kj} \exp(a_k\, x_1)]$$

En faisant $(-\text{sgn } a_j)x_1$ assez grand, on obtient la nullité des n_{kj} pour $a_k/a_j < 0$, la nullité de γ_j et la positivité de m_j : en faisant $(\text{sgn } a_j)x_1$ assez grand, on obtient la nullité des n_{kj} pour $k > j$ et $a_k/a_j > 0$, et la positivité de n_{jj}. En particulier, ceci entraîne que

$$n_{kj} = 0 \quad \text{pour} \quad k > j$$

ou (ce qui revient au même)

(1) $$n_{jk} = 0 \quad \text{pour} \quad j > k$$

Nous faisons de même $y_2 = 0$

$$\psi_1(x,y) = -q_1\, y_1^2 + \sum_{j=1}^{p} \exp(a_j\, x_1)[\cos(a_j\, y_1) - 1][l_j + \alpha_j\, x_2] + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1} n_{jk} \exp(a_j\, x_1 + b_k\, x_2)[\cos(a_j\, y_1) - 1]$$

Le coefficient de $\exp(a_j\, x_1)$ qui doit comme précédemment être négatif ou nul est

$$[\cos(a_j\, y_1) - 1][l_j + \alpha_j\, x_2 + \sum_{k=1}^{n} n_{jk} \exp(b_k\, x_2)]$$

En faisant $-(\text{sgn } b_j)x_2$ assez grand, on obtient la nullité des n_{jk} tels que $b_k/b_j < 0$, la nullité de α_j et la positivité de l_j et en faisant $(\text{sgn } b_j)x_2$ assez grand, on obtient la nullité des n_{jk} pour $k > j$ et $b_k/b_j > 0$, ce qui entraîne

$$n_{jk} = 0 \quad \text{pour} \quad k > j$$

ce qui comparé à (1) donne

$$n_{jk} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k$$

En rebaptisant n_j la constante positive ou nulle n_{jj}, nous obtenons pour $\phi_1(z)$ la représentation désirée. Il resterait à démontrer la positivité de P_2 pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, mais ceci sera fait pour n quelconque.

III. Cas général.

Théorème 5.2.

Soient a_m $(m = 1, \ldots, p)$ p points de $\mathbb{R}^n$

$$a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

tels que si a_{mj} et $a_{m'j}$ sont de même signe avec $m' > m$, alors $a_{m'j}/a_{mj}$ est un entier plus grand que 1 $(j = 1, \ldots, n)$. Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de $z = (z_1, \ldots, z_n)$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\gamma + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \sum_{m=1}^{p} [\sum_{\mathcal{E}} \lambda_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn} z_n)]\}$$

où γ est une constante réelle, les λ sont des constantes positives ou nulles, Π_1 et Π_2 des polynômes homogènes de degrés respectifs 1 et 2 à coefficients réels, Π_2 étant positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_j = 0$ ou 1 et où $\sum_{\mathcal{E}}$ indique la sommation sur les $2^n - 1$ valeurs non nulles de $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$. Alors

$$\phi_1(z) = \exp\{c + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{m=1}^{p} [\sum_{\mathcal{E}} l_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn} z_n)]\}$$

où c, les l, P_1 et P_2 ont respectivement les mêmes propriétés que γ, les λ, Π_1 et Π_2 (on a évidemment une formule analogue pour ϕ_2).

Démonstration. Puisque le résultat est vrai pour $n = 1$ (théorème de Linnik) et pour $n = 2$ (cas précédent), la méthode utilisée pour la démonstration du théorème 4.1. nous mène à la représentation

$$(2)\quad \phi_1(z) = \exp\{c + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{\substack{j<k;\, j=1,\ldots,n-1 \\ k=2,\ldots,n}} s_{jk} z_1 z_j z_k + \sum_{m=1}^{p} [\sum_{\mathcal{E}} l_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn} z_n)]\}$$

Posons comme précédemment

$$\psi_1(x,y) = \log \left| \frac{\phi_1(x + iy)}{\phi_1(x)} \right| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

En faisant $y_i = 0$ pour $i \neq j$ et k, nous obtenons

$$\psi_1(x,y) = - P_2(y) - s_{jk}\, x_1\, y_j\, y_k + R_1(x,y)$$

$R_1(x,y)$ restant borné lorsque y_j et y_k tendent vers l'infini, x restant fixé. En faisant x_1 assez grand et $y_j = y_k \to + \infty$, nous obtenons $s_{jk} = 0$; puisque j et k sont arbitraires, le polynôme du troisième degré est donc identiquement nul.

En revenant au cas général et en supposant l'existence de y° tel que $P_2(y^\circ) < 0$, alors

$$\psi_1(x,\ m\ y^\circ) = - m^2\, P_2(y^\circ) + R_1(x, y^\circ)$$

En faisant $m \to \infty$, nous obtenons

$$\psi_1(x,\ m\ y^\circ) \to + \infty$$

ce qui contredit la propriété de crête. Donc $P_2(z)$ est positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$. Il reste à démontrer la positivité des l. Pour cela nous utiliserons le lemme

Lemme.

Soient $c_1, \ldots, c_n$ n nombres réels non nuls. Pour que l'expression

$$\sum_{\mathcal{E}} m_{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1\, c_1\, z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n\, c_n\, z_n)$$

où $\mathcal{E}_j = 0$ ou 1 et où $\sum_{\mathcal{E}}$ indique la sommation sur les 2^n valeurs de $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ soit positive ou nulle quels que soient $z_1, \ldots, z_n$ réels il faut et il suffit que tous les $m_{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n}$ soient positifs ou nuls.

Démonstration. Pour $n = 1$, le résultat est évident. En effet, pour que

$$m_o + m_1 \exp(cz)$$

soit positif ou nul pour z réel, il faut en faisant $cz \to \infty$ $m_2 \geq 0$ et en faisant $cz \to -\infty$, $m_1 \geq 0$.

Nous montrons maintenant la nécessité de la condition par ré-

currence (la suffisance est évidente). L'expression peut s'écrire

$$A + B \exp(c_1 z_1)$$

où

$$A = \sum_{(\varepsilon | \varepsilon_1 = 0)} m_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_2 c_2 z_2 + \ldots + \varepsilon_n c_n z_n)$$

$$B = \sum_{(\varepsilon | \varepsilon_1 = 1)} m_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_2 c_2 z_2 + \ldots + \varepsilon_n c_n z_n)$$

En appliquant le cas $n = 1$, on obtient $A \geq 0, B \geq 0$ quel que soient $z_2, \ldots, z_n$ réels et l'hypothèse de récurrence appliquée aux quantités A et B (qui dépendent de $n-1$ variables), démontre le lemme.

Or, prenons comme seule variable z_k, les autres variables étant fixées réelles ; en appliquant le théorème de Linnik nous obtenons la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{\alpha + \beta z_k + \gamma z_k^2 + \sum_{m=1}^{p} \mu_m \exp(a_{mk} z_k)\}$$

où α, β, γ et les μ_m sont des fonctions des $n-1$ autres variables, μ_m étant positive ou nulle pour $z_1, \ldots, \widehat{z_k}, \ldots, z_n$ réels ($\widehat{z_k}$ indique l'absence de z_k dans la suite). Or, la représentation (2) nous donne, les fonctions 1, z_k, z_k^2, $\exp(a_{mk} z_k)$ étant linéairement indépendantes

$$\mu_m = \sum_{(\varepsilon | \varepsilon_k = 1)} l_{m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \widehat{\varepsilon_k a_{mk} z_k} + \ldots + \varepsilon_n a_{mn} z_n)$$

En utilisant le lemme, on en déduit la positivité de tous les $l_{m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$ pour lesquels $\varepsilon_k = 1$ et par conséquent de tous les l puisque k est arbitraire. Le théorème est complètement démontré.

IV. Application.

Considérons une loi indéfiniment divisible à n variables dont le spectre de Poisson soit fini. On sait (voir chapitre 1, § 2) que dans ce cas sa fonction caractéristique f s'écrit

$$f(t) = \exp\{i\, P_1(t) - P_2(t) + \sum_{m=1}^{p} [\sum_{\mathcal{E}} \lambda_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n}$$
$$[\exp(i\, \mathcal{E}_1\, a_{m1}\, t_1 + \ldots + i\mathcal{E}_n\, a_{mn}\, t_n) - 1]]\}$$

où $\mathcal{E}_j = 0$ ou 1 et où $\sum_{\mathcal{E}}$ désigne la sommation sur les 2^n-1 valeurs non nulles de $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n)$ et où P_1 est un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, P_2 un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour $t \in \mathbb{R}^n$, les λ étant des nombres positifs ou nuls. On voit donc qu'en posant $\phi(z) = f(iz)$, on retrouve la fonction à crête du théorème 5.2.

Par conséquent, si on impose aux points a_m les conditions du théorème 5.2. et en utilisant les raisonnements du théorème 4.2., on obtient le résultat suivant

Théorème 5.3.

Soit f la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible dont le spectre de Poisson se compose d'un nombre fini de points $a_m \in \mathbb{R}^n$ $(m = 1, \ldots, p)$

$$a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

tels que si a_{mj} et $a_{m'j}$ sont de même signe avec $m' > m$, $a_{m'j}/a_{mj}$ est un entier plus grand que un ; alors f appartient à la famille I_o des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles sans facteur indécomposable.

Remarque. On peut remplacer dans le résultat précédent I_o par I_o'' (voir la définition au chapitre I, § 3) si on utilise le raisonnement du théorème 4.3. au lieu de celui du théorème 4.2.

V. Autre résultat sur le spectre fini.

Nous montrons dans ce paragraphe que la condition imposée aux points $\{a_m\}$ est trop restrictive. Ceci sera montré par le théorème suivant :

Théorème 5.4.

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions à crête de $z = (z_1, z_2)$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\kappa + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \lambda_1 \exp(z_1) + \lambda_2 \exp(z_2)$$
$$+ \lambda_3 \exp(b\,z_2) + \lambda_4 \exp(z_1 + z_2) + \lambda_5 \exp(z_1 + b\,z_2)\}$$

où κ est une constante réelle, λ_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ est une constante positive ou nulle, Π_1 un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, Π_2 un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^2$. Dans le cas où b est soit un nombre négatif, soit un entier positif, alors

$$\phi_1(z) = \exp\{k + P_1(z) + P_2(z) + l_1 \exp(z_1) + l_2 \exp(z_2)$$
$$+ l_3 \exp(b\,z_2) + l_4 \exp(z_1 + z_2) + l_5 \exp(z_1 + b\,z_2)\}$$

où k, P_1, P_2 et les l ont respectivement les mêmes propriétés que κ, Π_1, Π_2 et les λ.

Démonstration. En utilisant la méthode employée au théorème 5.1. (fixer z_1, puis z_2 réel), nous obtenons la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{k + P_1(z) + P_2(z) + s_1 z_1^2 z_2 + s_2 z_2^2 z_1 + t z_1^2 z_2^2$$
$$+ (l_1 + \alpha z_2 + \beta z_2^2) \exp(z_1) + (l_2 + \gamma z_1 + \delta z_1^2) \exp(z_2)$$
$$+ (l_3 + \xi z_1 + \eta z_1^2) \exp(b z_2) + l_4 \exp(z_1 + z_2) + l_5 \exp(z_1 + b z_2)\}$$

En définissant $\psi_1(x,y)$ comme d'habitude, nous avons alors

$$\psi_1(x,y) = -P_2(y) - s_1(y_1^2 x_2 + 2x_1 y_1 y_2) - s_2(y_2^2 x_1 + 2x_2 y_1 y_2)$$
$$-t(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - y_1^2 y_2^2 + 4x_1 x_2 y_1 y_2)$$
$$+ \exp(x_1)\{(l_1 + \alpha x_2 + \beta x_2^2)[\cos(y_1) - 1] - \beta y_2^2 \cos(y_1)$$
$$-(\alpha y_2 + 2\beta x_2 y_2) \sin(y_1)\} + \exp(x_2)\{(l_2 + \gamma x_1 + \delta x_1^2)$$
$$[\cos(y_2) - 1] - \delta y_1^2 \cos(y_2) - (\gamma y_1 + 2\delta x_1 y_1) \sin(y_2)\}$$
$$+ \exp(b x_2)\{(l_3 + \xi x_1 + \eta x_1^2)[\cos(b y_2) - 1] - \eta y_1^2$$
$$\cos(b y_2) - (\xi y_1 + 2\eta x_1 y_1) \sin(b y_2)\}$$
$$+ l_4 \exp(x_1 + x_2)[\cos(y_1 + y_2) - 1] + l_5 \exp(x_1 + b x_2)$$
$$[\cos(y_1 + b y_2) - 1] .$$

Si nous faisons $y_1 = y_2 \to +\infty$, nous obtenons immédiatement $t = 0$.

Faisons maintenant $y_1 = 0$. On obtient alors (en posant $P_2(y) = q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_{12} y_1 y_2$)

$$\psi_1(x,y) = -y_2^2[q_2 + s_2 x_1 + \beta \exp(x_1)] + \exp(x_2)[\cos(y_2) - 1]$$
$$[l_2 + \gamma x_1 + \delta x_1^2 + l_4 \exp(x_1)] + \exp(b x_2)[\cos(b y_2) - 1]$$
$$[l_3 + \xi x_1 + \eta x_1^2 + l_5 \exp(x_1)]$$

Le coefficient de y_2^2 doit être négatif ou nul, ce qui entraîne $\beta \geq 0$ (et donc $\beta = 0$, d'après la remarque faite lors de la démonstration du théorème 5.1.) et $s_2 = 0$. De même les coefficients de $\exp(b x_2)$ et de $\exp(x_2)$ doivent être négatifs ou nuls (ce qui se voit en faisant pour le premier $(\operatorname{sgn} b)x_2 \to \infty$ et pour le second $x_2 \to \infty$ pour $b < 0$ et $y_2 = 2\Pi/b$ et $x_2 \to \infty$ pour $b > 0$), ce qui entraîne

$$l_5 \geq 0 , \quad l_3 \geq 0 ; \qquad \xi = \eta = 0$$
$$l_4 \geq 0 , \quad l_2 \geq 0 ; \qquad \gamma = \delta = 0$$

Nous supposons maintenant b entier positif. Nous faisons alors $y_2 = 0$.

$$\psi_1(x,y) = -y_1^2(q_1 + s_1 x_2) + \exp(x_1)(\cos y_1 - 1)$$
$$[l_1 + \alpha x_2 + l_4 \exp(x_2) + l_5 \exp(b x_2)]$$

Le coefficient de y_1^2 donne $s_1 = 0$. En faisant, pour $-x_2$ assez grand, $x_1 \to +\infty$, nous obtenons

$$\alpha = 0 \qquad l_1 \geq 0$$

Dans le cas où b est négatif, en faisant de même $y_2 = 0$, on obtient

$$s_1 = 0$$

Nous choisissons alors y_1 et y_2 de manière que

$$\begin{cases} y_1 + b y_2 = 2\Pi \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

On a alors $y_1 = 2\Pi/(1 - b) < 2\Pi$ et nous avons alors

$$\psi_1(x,y) = -P_2(y) + \exp(x_1)[(\cos(y_1) - 1)(l_1 + \alpha x_2) - \alpha y_2 \sin(y_1)]$$
$$+ l_2 \exp(x_2)[\cos(y_1) - 1] + l_3 \exp(b x_2)[\cos(b y_1) - 1]$$

En considérant le coefficient de $\exp(x_1)$, on obtient alors $\alpha = 0$, $l_1 \geq 0$. La positivité de P_2 pour $z \in \mathbb{R}^2$ se démontre comme pour le théorème 4.1.

Remarque. On pourrait modifier l'énoncé du théorème 5.1. (et par voie de conséquence celui du théorème 5.2.) de manière à englober le théorème 5.4. Il suffirait d'admettre une égalité possible de la forme

$$b_q = b_{q+1} = \ldots = b_p$$

et des conditions sur les a_m correspondants. Mais, dans l'absence de conditions nécessaires commodes, ceci ne ferait qu'alourdir l'énoncé des résultats obtenus sans vraisemblablement leur apporter la généralité souhaitable.

Remarquons enfin que la méthode exposée dans ce chapitre permet d'obtenir les analogues multidimensionnels de la plupart des théorèmes donnant des conditions nécessaires pour qu'une fonction entière donnée soit une fonction caractéristique (voir, par exemple, le § 7.3. de Lukacs [22]). On obtient, par exemple, l'important résultat suivant :

Théorème 5.5. (Théorème de Marcinkiewicz).

Soit $P(t)$ un polynôme des n variables $t = (t_1, \ldots, t_n)$. La fonction

$$f(t) = \exp[P(t)]$$

est une fonction caractéristique si et seulement si

$$P(t) = i\,\Pi_1(t) - \Pi_2(t)$$

où Π_1 est un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels et Π_2 un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour $t \in \mathbb{R}^n$.

CHAPITRE VI

Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles à spectre dénombrable.

I. Introduction.

Dans le cas d'une variable, le résultat le plus général obtenu jusqu'à présent dans ce domaine est celui d'Ostrovskiy [31] qui a démontré le résultat suivant :

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de la variable complexe z telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\kappa + \varpi_1 z + \varpi_2 z^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\lambda_j (\exp(a_j z) - 1 - a_j z) + \mu_j (\exp(b_j z) - 1 - b_j z)]\}$$

où

1) κ et ϖ_1 sont des constantes réelles, ϖ_2 une constante positive ou nulle.

2) $\{a_j\}$ (resp. $\{b_j\}$) est une suite de nombres positifs (resp. négatifs) telle que a_{j+1}/a_j (resp. b_{j+1}/b_j) est un entier plus grand que 1.

3) $\{\lambda_j\}$ et $\{\mu_j\}$ sont deux suites de nombres positifs ou nuls vérifiant les deux conditions

a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} [\lambda_j a_j^2 + \mu_j b_j^2] < +\infty$

b) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lambda_j = O(\exp(-C a_j^2)) \; ; \quad \mu_j = O(\exp(-C b_j^2)) \quad (j \to +\infty)$$

Alors $\phi_1(z)$ admet la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{k + p_1 z + p_2 z^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j (\exp(a_j z) - 1 - a_j z) + m_j (\exp(b_j z) - 1 - b_j z)\}$$

où k, p_1, p_2, l_j et m_j ont respectivement les mêmes propriétés que κ, ϖ_1, ϖ_2, λ_j et μ_j .

Nous ne considèrerons ici qu'un cas particulier de ce résultat, celui où $\lambda_j = \mu_j = 0$ pour $j = 0, -1, -2, \ldots$ Dans ce cas, on peut simplifier le résultat précédent sous la forme suivante :

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de la variable complexe z telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\kappa + \varpi_1 z + \varpi_2 z^2 + \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j \exp(a_j z) + \mu_j \exp(b_j z)]\}$$

où

1) κ et ϖ_1 sont des constantes réelles, ϖ_2 une constante positive ou nulle.

2) $\{a_j\}$ (resp. $\{b_j\}$) est une suite de nombres positifs (resp. négatifs) telle que a_{j+1}/a_j (resp. b_{j+1}/b_j) est un entier plus grand que un.

3) $\{\lambda_j\}$ et $\{\mu_j\}$ sont deux suites de nombres positifs ou nuls pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lambda_j = O(\exp(-C\, a_j^2)) \; ; \qquad \mu_j = O(\exp(-C\, b_j^2)) \qquad (j \to +\infty)$$

Alors $\phi_1(z)$ admet la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{k + p_1 z + p_2 z^2 + \sum_{j=1}^{\infty} [l_j \exp(a_j z) + m_j \exp(b_j z)]\}$$

où k, p_1, p_2, l_j et m_j ont respectivement les mêmes propriétés que κ, ϖ_1, ϖ_2, λ_j et μ_j avec de plus

$$0 \le p_2 \le \varpi_2 \; ; \qquad 0 \le l_j \le \lambda_j \; ; \qquad 0 \le m_j \le \mu_j \; .$$

C'est ce dernier résultat que nous généraliserons maintenant au cas de n variables, le cas général restant jusqu'à présent non élucidé.

II. Le cas $n = 2$.

Théorème 6.1.

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête de $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \phi_0(z) = \exp\{\kappa + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j \exp(a_j z_1) + \mu_j \exp(b_j z_2) + \nu_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où

1) κ est une constante réelle, Π_1 un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, et Π_2 un polynôme homogène du

second degré ($\Pi_2(z) = \varpi_1 z_1^2 + \varpi_2 z_2^2 + \varpi_{12} z_1 z_2$) positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^2$.

2) les a_j sont des constantes réelles telles que si a_j et a_k sont de même signe ($k > j$) , alors a_k/a_j est un entier plus grand que 1, les b_j ayant la même propriété.

3) les λ_j, μ_j, ν_j sont des constantes positives ou nulles telles qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$\lambda_j = O(\exp(-C\, a_j^2)) \; ; \; \mu_j = O(\exp(-C\, b_j^2)) \; ; \; \nu_j = O(\exp(-C[a_j^2 + b_j^2])) \quad (j \to +\infty)$$

Alors $\phi_1(z)$ admet la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{k + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{j=1}^{\infty} [l_j \exp(a_j z_1) + m_j \exp(b_j z_2) + n_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où k, P_1, P_2, l_j, m_j, n_j ont respectivement les mêmes propriétés que κ, Π_1, Π_2, λ_j, μ_j, ν_j .

Pour la démonstration, nous utiliserons principalement quatre lemmes dont les trois derniers sont plus ou moins directement inspirés de ceux utilisés par Ostrovskiy [31] dans le cas d'une variable.

Lemme 1.

Soit $\{\lambda_j\}$ une suite de nombres réels tels que

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1/|\lambda_j|) < +\infty$$

Les fonctions 1, z, z^2, $\exp(\lambda_j z)$ sont topologiquement libres dans l'espace $C(a,b)$ des fonctions continues sur $[a,b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) muni de la norme $\|f\| = \sup_{a<z<b} |f(z)|$.

Démonstration.(1) Pour démontrer ce lemme, il suffit (voir Schwartz [36]) de trouver une mesure non nulle portée par $[a,b]$ et orthogonale aux fonctions 1, z, z^2, $\exp(\lambda_j z)$. D'après le théorème de Paley-Wiener, ceci revient à exhiber une fonction de type exponentiel, à carré sommable, ayant une racine double à l'origine et

---

(1) La démonstration de ce lemme m'a été suggérée par Monsieur J.P. Kahane.

s'annulant sur l'ensemble $\{-i\lambda_j\}$. Un exemple d'une telle fonction est donnée par

$$\phi(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{it}{\lambda_j}\right) \frac{\sin^2 \alpha_j t}{\alpha_j^2 t^2} \right] t^2$$

où α_j est une suite de nombres réels telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty$$

Lemme 2.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ et vérifiant les conditions

a) $|f(z)| \leq M_1 |z+1|^a$ (Re z = 0)

b) $|f(z)| \leq M_2 (z+1)^b \exp(bz)$ (Im z = 0)

c) $|f(z)| \leq M_3 |z+1|^c \exp(d(\mathrm{Re}\, z)^2)$ (Re z ≥ 0)

où M_1, M_2 et M_3 sont des constantes positives et a, b, c ($c \geq a$), d sont des constantes positives ou nulles. Alors, dans tout le demi-plan $\mathrm{Re}\, z \geq 0$

$$|f(z)| \leq M_1 |z+1|^a \exp(b\, \mathrm{Re}\, z) .$$

Pour la démonstration, voir Ostrovskiy [31], corollaire du théorème 1.

Lemme 3.

Si la fonction entière $f(z)$ vérifie pour un K réel la condition

$$|f(z)| \leq \exp\{K\, \mathrm{Re}\, z + O(\mathrm{Log}\, |z|)\} \qquad \mathrm{Re}\, z \geq 0$$

et est représentable sous la forme

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \exp(2\Pi pz/T)$$

où $T > 0$ et où la série converge uniformément dans tout ensemble borné, alors

$$a_p = 0$$

pour $p > [KT\,(2\Pi)^{-1}]$.

Pour la démonstration, voir Ostrovskiy [31], théorème 3.

Pour formuler le quatrième lemme, nous introduisons les notations suivantes

(1) $\psi_m(z) = \log \phi_m(z)$; $u_m(x,y) = \mathrm{Re}\ \psi_m(x+iy)$ $(m = 0,1,2$; $x,y \in \mathbb{R}^2)$

Nous avons alors le

Lemme 4.

Il existe un $N > 0$ tel que

$$|\psi_m(z)| = O\{(|z_1| + |z_2|)\exp[N((\mathrm{Re}\ z_1)^2 + (\mathrm{Re}\ z_2)^2)]\} \quad (m = 1, 2)$$

La démonstration est fort semblable à celle du théorème 2.5. et sera donc très abrégée. Nous obtenons facilement les relations

(2) $$|u_1(x,y)| \leq |u_1(x,0)| + |u_0(x,0) - u_0(x,y)|$$

(3) $$|\psi_0(z)| = O\{\exp[N((\mathrm{Re}\ z_1)^2 + (\mathrm{Re}\ z_2)^2)]\}$$

De (3) et du corollaire du théorème 2.3., on déduit que

$$u_1(x,0) = O(\exp[N(x_1^2 + x_2^2)])$$

On en déduit le lemme 4 en utilisant la formule de Poisson.

Démonstration du théorème. En fixant z_2 réel, nous voyons que les fonctions $\phi_m(z_1,z_2)$ vérifient toutes les conditions du théorème d'Ostrovskiy et nous obtenons donc la représentation

(4) $$\phi_1(z) = \exp\{\alpha + \beta\, z_1 + \gamma\, z_1^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \exp(a_j z_1)\}$$

où α, β, γ, δ_j sont des fonctions de z_2 réelles pour z_2 réel et vérifiant de plus pour z_2 réel

$$0 \leq \gamma \leq \varpi_2$$

$$0 \leq \delta_j \leq \mu_j + \nu_j \exp(b_j z_2)$$

En fixant de même z_1 réel, nous obtenons la représentation

(6) $$\phi_1(z) = \exp\{\xi + \eta\, z_2 + \zeta\, z_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \exp(b_k z_2)\}$$

ξ, η, ζ, et ω_k étant des fonctions de z_1 réelles pour z_1 réel vérifiant pour z_1 réel

(7) $$0 \leq \zeta \leq \varpi_1 \ ; \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_k + \nu_k \exp(a_k z_1)$$

En comparant (4) et (6), nous obtenons l'équation valable pour z_1 et z_2 réels

$$(8)\qquad \alpha + \beta z_1 + \gamma z_1^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \exp(a_j z_1) = \xi + \eta z_2 + \zeta z_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \exp(b_k z_2)$$

Etant donnés $\varepsilon > 0$, a_1, b_1, a_2, b_2 ($-\infty < a_1 < b_1 < +\infty$; $-\infty < a_2 < b_2 < +\infty$) , il existe p et q tels que (8) devienne

$$(9)\qquad \alpha + \beta z_1 + \gamma z_1^2 + \sum_{j=1}^{q} \delta_j \exp(a_j z_1) = \xi + \eta z_2^2 + \zeta z_2^2 + \sum_{k=1}^{p} \omega_k \exp(b_k z_2) + R(z_1, z_2)$$

où

$$|R(z_1, z_2)| < \varepsilon \qquad z_1 \in [a_1, b_1],\ z_2 \in [a_2, b_2]$$

On peut alors trouver $p+3$ valeurs de z_1 de manière que l'équation (9) engendre un système résoluble de $p+3$ équations linéaires aux $p+3$ inconnues α, β, γ, δ_j ($j = 1, \ldots, p$) et on obtient alors en résolvant ce système

$$\alpha = \xi_\alpha(\varepsilon) + \eta_\alpha(\varepsilon) z_2 + \zeta_\alpha(\varepsilon) z_2^2 + \sum_{k=1}^{q} \omega_{\alpha k}(\varepsilon) \exp(b_k z_2) + R_\alpha(\varepsilon)$$

.....

$$\delta_j = \xi_{\delta_j}(\varepsilon) + \eta_{\delta_j}(\varepsilon) z_2 + \zeta_{\delta_j}(\varepsilon) z_2^2 + \sum_{k=1}^{q} \omega_{\delta_j k}(\varepsilon) \exp(b_k z_2) + R_{\delta_j}(\varepsilon)$$

avec

$$R_\alpha(\varepsilon) + R_\beta(\varepsilon) z_1 + R_\gamma(\varepsilon) z_1^2 + \sum_{j=1}^{p} R_{\delta_j}(\varepsilon) \exp(a_j z_1) = R(z_1, z_2)$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ et en utilisant le lemme 1, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_\alpha(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\beta(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\gamma(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} R_{\delta_j}(\varepsilon) = 0$$

et ceci uniformément rar rapport à $z_2 \in [a_2, b_2]$. Etant données deux valeurs ε et ε' nous avons par exemple pour α ,

$$[\xi_\alpha(\varepsilon) - \xi_\alpha(\varepsilon')] + [\eta_\alpha(\varepsilon) - \eta_\alpha(\varepsilon')] z_2 + [\zeta_\alpha(\varepsilon) - \zeta_\alpha(\varepsilon')] z_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\omega_{\alpha k}(\varepsilon) - \omega_{\alpha k}(\varepsilon')] \exp(b_k z_2) = R_\alpha(\varepsilon') - R_\alpha(\varepsilon)$$

où nous avons posé $\omega_{\alpha_k}(\varepsilon) = 0$ si $k > q$. En faisant $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$ et en appliquant le lemme 1, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon' \to 0} [\xi_\zeta(\varepsilon) - \xi_\alpha(\varepsilon')] = \ldots = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon' \to 0} [\omega_{\alpha k}(\varepsilon) - \omega_{\alpha k}(\varepsilon')] = 0$$

Donc toutes les suites sont des suites de Cauchy et tendent donc vers des limites lorsque $\varepsilon \to 0$. De plus, une nouvelle application du lemme 1 nous montre que ces limites sont indépendantes des constantes a_1, b_1, a_2, b_2 . Nous avons donc

$$(10) \qquad \alpha = \xi_\alpha + \eta_\alpha z_2 + \zeta_\alpha z_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\alpha k} \exp(a_k z_1)$$

où ξ_α, η_α, ζ_α, $\omega_{\alpha k}$ sont des constantes réelles et des représentations analogues pour β, γ, δ_j . De plus, puisque la représentation est valable quel que soit z_2 réel, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\alpha k} \exp(b_k z_2)$ converge quel que soit z_2 complexe et (10) définit α comme fonction entière de z_2 . Nous obtenons donc la représentation

$$\psi_1(z) = k + p_1 z_1 + p_2 z_2 + q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_{12} z_1 z_2 + r_1 z_1^2 z_2 + r_2 z_2^2 z_1 + s\, z_1^2 z_2^2 + \sum_{j=1}^{\infty} [(l_j + \theta_j z_2 + \rho_j z_2^2) \exp(a_j z_1) + (m_j + \sigma_j z_1 + \tau_j z_1^2) \exp(b_j z_2)] + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n_{jk} \exp(a_j z_1 + b_k z_2)$$

ce qui donne, par un calcul simple (pour la définition de u_1 , voir (1))

$$\begin{aligned} u_1(x,0) - u_1(x,y) &= q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_{12} y_1 y_2 + r_1 (y_1^2 x_2 + 2x_1 y_1 y_2) \\ &+ r(y_2^2 x_1 + 2x_2 y_1 y_2) + s\,(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - y_1^2 y_2^2 + 4x_1 x_2 y_1 y_2) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \{\exp(a_j x_1)\, [(l_j + \theta_j x_2 + \rho_j x_2^2)\,(1 - \cos(a\, y)) \\ &\quad + \rho_j y_2^2 \cos(a_j y_1) + (\theta_j y_2 + 2\rho_j x_2 y_2) \sin(a_j y_1)] \\ &\quad + \exp(b_j x_2)\, [(m_j + \sigma_j x_1 + \tau_j x_1^2)(1 - \cos(b_j y_2)) \\ &\quad + \tau_j y_1^2 \cos(b_j y_2) + (\sigma_j y_1 + 2\tau_j x_1 y_1) \sin(b_j y_2)]\} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [n_{jk} \exp(a_j x_1 + b_k x_2)(1 - \cos(a_j y_1 + b_k y_2))] \end{aligned}$$

Or, de la propriété de crête, on déduit que

$$(11) \qquad 0 \le u_1(x,0) - u_1(x,y) \le u_o(x,0) - u_o(x,y)$$

et de

$$u_o(x,0) - u_o(x,y) = \varpi_1 y_1^2 + \varpi_2 y_2^2 + \varpi_{12} y_1 y_2$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j \exp(a_j x_1)(1 - \cos(a_j y_1)) + \mu_j \exp(b_j x_2)$$
$$(1 - \cos(b_j y_2)) + \nu_j \exp(a_j x_1 + b_j x_2)(1 - \cos(a_j y_1 + b_j y_2))]$$

en faisant (pour x fixé) $y_1 = y_2 \to +\infty$, nous obtenons

$$s = 0$$

En considérant les coefficients de y_1^2 , on obtient de (11)

$$(12) \qquad 0 \le q_1 + r_1 x_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \exp(b_j x_2) \cos(b_j y_2) \le \varpi_1$$

Or, le terme du milieu est la partie réelle de $\beta(z_2)$. On en déduit alors (lemme 2 du théorème 2.5.) que β est une fonction entière de type exponentiel 0. Du lemme 3, on déduit alors que

$$\tau_j = 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots$$

et de (12)

$$r_1 = 0 \qquad q_1 \ge 0 .$$

Le cas symétrique des coefficients de y_2^2 donne

$$\rho_j = r_2 = 0$$

Nous renumérotons maintenant les b_j en affectant un indice positif aux b_j positifs et un indice négatif aux b_j négatifs ($|b_j| < |b_{j+1}|$) . Nous faisons maintenant $y_1 = 0$, $y_2 = 2\Pi/b_{q+1}$ (en supposant $q > 0$, le cas $q < 0$ se traitant d'une manière analogue). Nous obtenons alors en posant $y_o = (0, 2\Pi/b_{q+1})$

$$u_1(x,0) - u_1(x,y) = (4\Pi^2 q^2/b_q^2) + \sum_{j=-\infty}^{q} \{\exp(b_j x_2)(1 - \cos(2\Pi b_j/b_{q+1}))$$
$$(m_j + \sigma_j x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_{kj} \exp(a_k x_1))\}$$

En posant

$$(12) \qquad B_q(x_1) = m_q + \sigma_q x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_{kq} \exp(a_k x_1)$$

nous obtenons de (11) que pour x_1 réel

$$0 \le B_q(x_1) \le \mu_q + \nu_q \exp(a_q x_1)$$

Revenons à la formule (1) qui peut s'écrire, puisque $\psi_m(z)$ est réelle pour z réel

$$u_m(x,y) = \frac{1}{2}\{\psi_m(x+iy) + \psi_m(x-iy)\}$$

Pour y fixé, on a à droite une fonction entière de x que nous prenons comme définition de $u_m(x,y)$ pour x complexe. Du lemme 4, on déduit alors que

$$u_m(x,y) = O\{(|x_1| + |x_2|)\exp[N((\mathrm{Re}\ x_1)^2 + (\mathrm{Re}\ x_2)^2)]\}$$

De l'expression de $u_m(x,0) - u_m(x,y)$, on déduit alors que pour x_1 complexe

$$B_q(x_1) = O\{|x_1|\exp(N(\mathrm{Re}\ x_1)^2)\}$$

On peut alors appliquer le lemme 2 à $B_q(x_1)$ (l'estimation pour x_1 imaginaire étant évidente) et nous obtenons que dans le demi-plan $(\mathrm{sgn}\ a_q)(\mathrm{Re}\ x_1) \geq 0$, on a l'extimation

$$B_q(x_1) = O\{|x_1+1|\exp(a_q\ \mathrm{Re}\ x_1)\}$$

et dans le demi-plan $(\mathrm{sgn}\ a_q)(\mathrm{Re}\ x_1) \leq 0$ on a l'extimation

$$B_q(x_1) = O\{|x_1+1|\}$$

ce qui, avec (12) et le lemme 3, donne la nullité de tous les n_{kq} tels que $a_k/a_q < 0$ et par conséquent en faisant $-(\mathrm{sgn}\ a_q)\ x_1 \to +\infty$

$$\sigma_q = 0\ ;\quad m_q \geq 0$$

et la nullité de tous les n_{kq} tels que $a_k/a_q > 0$ et $k > q$ et

$$n_{qq} \geq 0\ .$$

En particulier, on obtient la nullité de tous les n_{jk} avec $j > k$. De même, le cas symétrique $y_2 = 0, y_1 = 2\Pi/a_{q+1}$ donne la nullité de tous les n_{jk} avec $k < j$ (donc la nullité de tous les n_{jk} avec $j \neq k$) et

$$\theta_q = 0\ ;\quad l_q \geq 0$$

Nous obtenons donc la représentation (en rebaptisant n_j les constantes n_{jj}).

$$\psi_1(z) = k + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{j=1}^{\infty}[l_j\exp(a_jz_1) + m_j\exp(b_jz_2) + n_j\exp(a_jz_1 + b_jz_2)]$$

Il reste à montrer que $P_2(z)$ est positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^2$. Or

$$u_1(x,0) - u_1(x,ky) = k^2 P_2(y) + R(x,ky)$$

où, pour x et y fixés, $R(x,ky)$ reste bornée lorsque $k \to \infty$. En faisant $k \to \infty$, on obtient de (11) que $P_2(y) \geq 0$. Le théorème est démontré.

III. Cas général. Application.

Du théorème 6.1., on déduit en utilisant la méthode exposée dans le cas fini en remplaçant les propriétés d'indépendance linéaire par celles d'indépendance topologique (Lemme 1) le théorème suivant

Théorème 6.2.

Soient $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ deux fonctions à crête des n variables complexes $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\kappa + \Pi_1(z) + \Pi_2(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{\mathcal{E}} \lambda_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn} z_n)]\}$$

où

1) κ est une constante réelle, Π_1 un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels, Π_2 un polynôme homogène du second degré positif ou nul pour $z \in \mathbb{R}^n$.

2) les a_{mj} sont des constantes réelles telles que si a_{mj} et $a_{m'j}$ sont de même signe ($m' > m$), alors $a_{m'j}/a_{mj}$ est un entier plus grand que 1 ($j = 1, \ldots, n$).

3) les λ sont des constantes positives ou nulles telles qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$\lambda_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} = O(\exp[-C(\mathcal{E}_1 a_{m1}^2 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn}^2)]) \quad (m \to \infty)$$

4) $\mathcal{E}_j = 0$ ou 1 et $\sum_{\mathcal{E}}$ indique une sommation sur les $2^n - 1$ valeurs non nulles de $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$.

Alors

$$\phi_1(z) = \exp\{k + P_1(z) + P_2(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{\mathcal{E}} l_{m,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n} \exp(\mathcal{E}_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \mathcal{E}_n a_{mn} z_n)$$

où k, P_1, P_2 et les l ont respectivement les mêmes propriétés

que κ, Π_1, Π_2 et les λ .

Comme application, nous avons le

Théorème 6.3.

Soit f la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible dont le spectre de Poisson se compose d'une suite de points $a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ tels que si a_{mj} et $a_{m'j}$ sont de même signe avec $m' > m$, $a_{m'j}/a_{mj}$ est un entier plus grand que 1 et dont les paramètres d'énergie $\lambda_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ vérifient la condition 3 du théorème précédent. Alors f appartient à I_o'' .

CHAPITRE VII

Décomposition des fonctions caractéristiques des lois de treillis.

I. Enoncé du résultat.

Définition. Nous appelons $\mathcal{C}$ la classe des fonctions à crête $\phi(z) = \phi(z_1, \ldots, z_n)$ des n variables complexes $z = (z_1, \ldots, z_n)$ périodiques de période $2i\Pi$ par rapport à chaque variable, c'est-à-dire telles que

$$\phi(z_1 + 2i\Pi a_1, \ldots, z_n + 2i\Pi a_n) = \phi(z_1, \ldots, z_n)$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ entiers.

Théorème 7.1.

Soient $\phi_1 \in \mathcal{C}$ et $\phi_2 \in \mathcal{C}$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \exp\{\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{\varepsilon} \lambda_{m,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \varepsilon_n a_{mn} z_n)]\}$$

où

1) α est une constante réelle.

2) les a_{mj} sont des entiers tels que si a_{mj} et $a_{m'j}$ sont de même signe avec $m' > m$, alors $a_{m'j}/a_{mj}$ est un entier plus grand que 1 $(j = 1, \ldots, n)$.

3) les λ sont des constantes positives ou nulles telles que lorsque $m \to \infty$

$$\lambda_{m,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = o(\exp -2[\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j |a_{mj}| \log|a_{mj}|])$$

Alors

$$\phi_1(z) = \exp\{c + P_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{\varepsilon} l_{m,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \exp(\varepsilon_1 a_{m1} z_1 + \ldots + \varepsilon_n a_{mn} z_n)]\}$$

où c et les l ont respectivement les mêmes propriétés que γ et les λ et $P_1(z)$ est un polynôme du premier degré à coefficients entiers.

Le cas $n = 1$ a été démontré par I. V. Ostrovskiy [27]. Il suffit de montrer le cas $n = 2$, le passage des cas $n = 1$ et $n = 2$ au cas général se faisant par la méthode habituelle et ne présentant pas de difficulté particulière.

II. Le cas $n = 2$.

En changeant (pour simplifier) les notations, le théorème à démontrer s'énonce

Théorème 7.2.

Soient $\phi_1 \in \mathcal{P}$, $\phi_2 \in \mathcal{E}$ telles que

$$\phi_1(z)\,\phi_2(z) = \phi_0(z) = \exp\{\gamma + \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j \exp(a_j z_1) + \mu_j \exp(b_j z_2) + \nu_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où

1) γ est une constante.

2) $\{a_j\}$ (resp. $\{b_j\}$) est une suite d'entiers telle que si a_j et a_k (resp. b_j et b_k) sont de même signe avec $k > j$, alors a_k/a_j (resp. b_k/b_j) est un entier plus grand que 1.

3) λ_j, μ_j, ν_j sont des constantes positives ou nulles telles que

$$\lambda_j = o\{\exp[-2|a_j| \log|a_j|]\} \; ; \quad \mu_j = o\{\exp[-2|b_j| \log|b_j|]\} \; ;$$

$$\nu_j = o\{\exp[-2(|a_j| \log|a_j| + |b_j| \log|b_j|)]\} \quad (j \to \infty)$$

Alors

$$\phi_1(z) = \exp\{c + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \sum_{j=1}^{\infty} [l_j \exp(a_j z_1) + m_j \exp(b_j z_2) + n_j \exp(a_j z_1 + b_j z_2)]\}$$

où c, l_j, m_j, n_j ont respectivement les mêmes propriétés que γ, λ_j, μ_j, ν_j et où p_1 et p_2 sont des entiers.

Démonstration. En utilisant le résultat d'Ostrovskiy et la méthode exposée au chapitre VI, nous obtenons la représentation

$$\phi_1(z) = \exp\{c + p_1 z_1 + p_2 z_2 + q\, z_1 z_2 + \sum_{j=1}^{\infty} [(l_j + \alpha_j z_2) \exp(a_j z_1) + (m_j + \beta_j z_1) \exp(b_j z_2)] + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n_{jk} \exp(a_j z_1 + b_k z_2)\}$$

En posant $(m = 0, 1, 2)$

$$\psi_m(z) = \log \phi_m(z)$$

$$u_m(x,y) = \operatorname{Re} \psi_m(x + iy) = \frac{1}{2}[\psi_m(x + iy) + \psi_m(x - iy)] \quad x \in \mathbb{R}^2, \; y \in \mathbb{R}^2$$

nous obtenons

$$u_1(x,0) - u_1(x,y) = q\, y_1 y_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \{\exp(a_j x_1)[(l_j + \alpha_j x_2)(1 - \cos(a_j y_1)) + \alpha_j y_2 \sin(a_j y_1)] + \exp(b_j x_2)[(m_j + \beta_j x_1)(1 - \cos(b_j y_2)) + \beta_j y_1 \sin(b_j y_2)]\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n_{jk} \exp(a_j x_1 + b_k x_2)[1 - \cos(a_j y_1 + b_k y_2)]$$

et l'on doit avoir

$$(1) \qquad 0 \leq u_1(x,0) - u_1(x,y) \leq u_o(x,0) - u_o(x,y)$$

En faisant $y_1 = y_2 \to \infty$, on déduit immédiatement de (1) que

$$q = 0$$

Nous renumérotons maintenant les b_j en affectant un indice positif aux b_j positifs et un indice négatif aux b_j négatifs ($|b_j| < |b_{j+1}|$) . Nous faisons alors $y_1 = 0, y_2 = 2\Pi/b_{q+1}$ (en supposant $q > 0$, le cas $q < 0$ se traitant de manière analogue). Nous obtenons :

$$u_1(x,0) - u_1(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{q} \exp(b_j x_2)[1 - \cos(2\Pi b_j / b_{q+1})][m_j + \beta_j x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_{jk} \exp(a_k x_1)]$$

En posant

$$B_q(x_1) = m_q + \beta_q x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_{kq} \exp(a_k x_1)$$

nous obtenons immédiatement de (1) que pour x_1 réel

$$0 \leq B_q(x_1) \leq \mu_q + \nu_q \exp(a_q x_1)$$

En prenant comme définition de $u_1(x,y)$ pour x complexe

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}[\psi_1(x + iy) + \psi_1(x - iy)]$$

et en utilisant la relation (dont la démonstration est semblable à celle du lemme 4 du chapitre précédent et sera donc omise)

$$|\psi_1(z)| \leq \exp\{o[\exp(\tfrac{1}{2}(|z_1| + |z_2|))]\} \qquad (z_1 \to \infty,\ z_2 \to \infty)$$

nous obtenons

$$|u_1(x,0) - u_1(x,y)| \leq \exp\{o[\exp(\tfrac{1}{2}(|x_1| + |x_2|))]\} \qquad (x_1 \to \infty,\ x_2 \to \infty)$$

ce qui implique que

$$|B_q(x_1)| \leq \exp\{o[\exp(\tfrac{1}{2}|x_1|)]\} \qquad (x_1 \to \infty)$$

Nous utilisons maintenant le lemme suivant (cf. Ostrovskiy, [27] p. 52) :

Lemme.

Soit $f(z)$ une fonction entière représentable sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(nz)$$

Si

$$|f(z)| \leq \exp\{o[\exp(\tfrac{1}{2}|z|)]\} \qquad (z \to \infty)$$

et si sur la demi-droite $z > 0$

$$|f(z)| = O(e^{sz})$$

où $s \geq 0$, alors, pour $n > s$, nous avons $c_n = 0$.

En appliquant ce lemme pour $(\text{sgn } a_q)\, x_1 \to \infty$, nous obtenons

$$n_{kq} = 0$$

si $a_k/a_q > 0$, $k > q$ et pour $-(\text{sgn } a_q)\, x_1 \to \infty$, nous obtenons

$$n_{kq} = 0$$

si $a_k/a_q < 0$ et en revenant à (1), on obtient alors

$$\beta_q = 0 , \quad m_q \geq 0 , \quad n_{qq} \geq 0 .$$

Le cas symétrique donne de même

$$\alpha_q = 0 , \quad l_q \geq 0$$

et pour $j \neq k$

$$n_{jk} = 0$$

On obtient donc pour ϕ_1 la représentation désirée (en rebaptisant n_q les constantes n_{qq}), le fait que p_1 et p_2 sont entiers se déduisant de la définition même de la classe $\mathcal{C}$.

III. Application.

Pour l'application du résultat précédent aux fonctions caractéristiques, nous introduisons la définition suivante :

Définition. La probabilité P est dite de treillis de pas

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ si la probabilité P est une probabilité discrète concentrée aux points

$$(a_1 + l_1 \xi_1, \ldots, a_n + l_n \xi_n)$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels fixes et $l_1, \ldots, l_n$ parcourent l'ensemble des entiers.

On en déduit facilement que si P est une probabilité de treillis, alors sa fonction caractéristique $f(t)$ est de la forme

$$f(t) = \exp[i\, P(t)]\, f'(t)$$

où $P(t)$ est un polynôme homogène du premier degré à coefficients réels et $f'(t)$ une fonction caractéristique périodique de période $2\Pi/\xi_j$ par rapport à la variable t_j $(j = 1, \ldots, n)$. Si, de plus, f est entière, la fonction g' définie par

$$g'(z_1, \ldots, z_n) = f'(t_1, \ldots, t_n) \qquad i\, \xi_j t_j = z_j \ (j = 1, \ldots, n)$$

appartient à $\mathcal{C}$.

De plus, on démontre facilement qu'une fonction caractéristique $f(z)$ des n variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$ correspond à une probabilité de treillis de pas ξ si et seulement si ses n fonctions caractéristiques marginales $f(0, \ldots, 0, z_j, 0, \ldots, 0)$ correspondent à des probabilités de treillis à une dimension de pas ξ_j.

De cette remarque et d'un théorème bien connu dans le cas d'une variable (voir, par exemple, Linnik [20], théorème 5.1.1.), on déduit le résultat suivant :

Si f, f_1, f_2 sont des fonctions caractéristiques telles que

$$f = f_1\, f_2 \tag{2}$$

et si f correspond à une probabilité de treillis de pas ξ, alors f_j correspond aussi à une probabilité de treillis de même pas $(j = 1,2)$. Ce résultat reste vrai si au lieu des composantes f_j vérifiant (2) on considère des composantes-α.

De toutes ces remarques et du théorème 7.1., on déduit alors facilement le

Théorème 7.3.

Si la fonction caractéristique f admet la représentation

$$f(z) = \exp\{i\,P(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{\varepsilon} \lambda_{m,\varepsilon_1,\ \ldots,\varepsilon_n} (\exp(i\varepsilon_1 a_{m1}\xi_1 z_1 + \ldots + i\varepsilon_n a_{mn}\xi_n z_n) - 1)]\}$$

où $P(z)$ est un polynôme homogène du premier degré, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n des constantes réelles et où les a_{mj} et les λ vérifient les conditions 2 et 3 du théorème 7.1., $\sum_{\varepsilon}$ ayant la signification habituelle, alors f appartient à I_o (et même à I_o').

CHAPITRE VIII

Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles n'ayant pas de composante normale

I. Résultat fondamental.

Pour formuler le théorème principal de ce chapitre, nous introduisons les notations suivantes : étant donnés deux ensembles A et B de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$A + B = \{z : z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$$

et définissons par récurrence $(p)A$, puis $^{\infty}A$ par

$$(1)\quad {}^{1}A = A\ ; \qquad {}^{p}(A) = ({}^{p-1}A) + A$$

$$^{\infty}A = \bigcup_{p \geq 1} {}^{(p)}A$$

Etant donnée une mesure N sur $\mathbb{R}^n$, nous notons $S(N)$ le support de N. Nous avons alors le

Théorème 8.1.

Soit

$$(1)\quad f_o(z) = \exp\left\{\int_D [\exp(ix.z) - 1]\, d\, N_o(x)\right\}$$

une fonction caractéristique indéfiniment divisible de $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ où N_o est une mesure positive sur $\mathbb{R}^n$ à support contenu dans le cube $D = \prod_{m=1}^{n} [a_m, b_m]$ avec $0 < a_m < b_m < \infty$. Alors tout facteur f_1 de f_o est de la forme

$$f_1(z) = \exp\{i\, \Pi_1(z) + \int_D [\exp(ix.z) - 1]\, d\, N_1(x)\}$$

où $\Pi_1(z)$ est un polynôme homogène du premier degré en z à coefficients réels et N_1 est une mesure qui est positive dans le cube $\prod_{m=1}^{n} [a_m, 2a_m]$ privé du point $(2a_1, \ldots, 2a_n)$. De plus, si $S(N_o) = A$, alors

$$S(N_1) = D \cap ({}^{\infty}A)$$

Démonstration. De (1), on tire immédiatement la formule

$$f_o(z) = C_o \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[\int_D \exp(ix.z)\, d\, N_o(x)\right]^p$$

ce qui entraîne, si P_o désigne la probabilité associée à f_o ,

$$P_o = C_o \{ \mathcal{E} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} N_o^{p*} \}$$

où $\mathcal{E}$ désigne la mesure dégénérée associant la masse 1 à l'origine, d'où l'on déduit que

$$S(P_o) = \{0\} \cup (\infty A)$$

Supposons que

$$P_o = P_1 * P_2$$

où P_1 et P_2 sont des probabilités sur $\mathbb{R}^n$. Nous notons f_1 la fonction caractéristique de P_1 . Puisque

$$S(P_o) = \overline{S(P_1) + S(P_2)}$$

$S(P_1)$ et $S(P_2)$ sont bornés inférieurement (c'est-à-dire que $S(P_1)$ est contenu dans $\prod_{m=1}^{n} [k_m, \infty[$ (1) On peut supposer que $k_m = 0$ $(m = 1, \ldots, n)$ (ce qui revient à multiplier $f_1(z)$ par un facteur $\exp(-i\, \Pi_1(z))$, $\Pi_1(z)$ ayant les propriétés de l'énoncé. On a alors

$$S(P_1) \cup S(P_2) \subset S(P_o)$$

et on peut donc écrire P_1 sous la forme

$$P_1 = C_1 \mathcal{E} + G_1$$

où $S(G_1) \subset (\infty A)$, ce qui entraîne pour $z \in \mathbb{R}^n$

$$f(z) = C_1 + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix.z)\, dG_1(x)$$

De plus, puisque f_o est une fonction entière, f_1 est aussi, d'après le théorème de Raikov, une fonction entière, et la relation précédente est valable dans tout $\mathbb{C}^n$.

Prenons $\eta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x.\eta) dG_1(x) < C_1$ et définissons la mesure H_1 par

$$H_1(A) = \int_A \exp(-y.\eta) d\, G_1(y)$$

Nous avons alors pour $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(2) \qquad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \exp[ix.\xi]\, dH_1(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dH_1(x) < C_1$$

---

(1) Cf. corollaire 3 du théorème 3.3.

ce qui entraine que

$$g_1(\xi + i\eta) = \log f_1(\xi + i\eta) = \log\{C_1 + \int_{\mathbb{R}^n} \exp[ix.\xi]\ dH_1(x)\}$$

$$= \log C_1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p\ C_1^p} \{\int_{\mathbb{R}^n} \exp[ix.\xi]\ dH_1(x)\}^p$$

$$= \log C_1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p\ C_1^p} \{\int_{\mathbb{R}^n} \exp[ix.\xi]\ dH_1^{p*}(x)\}$$

et, d'après (2), la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p\ C_1^p}\ H_1^{p*}$$

est convergente et a pour limite M_1 avec

$$S(M_1) \subset (\infty\ A)$$

De plus, M_1 est positive dans le cube $\prod_{m=1}^{n} [a_m, 2a_m[$ et même dans le cube $\prod[a_m, 2a_m]$ privé du point $(2a_1, \ldots, 2a_n)$.

En définissant la mesure N_1 par

$$N_1(A) = \int_A \exp(y.\eta)\ dM_1(y)$$

nous obtenons

$$g_1(z) = \log C_1 + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix.z)\ d\ N_1(x)$$

avec $S(M_1) = S(N_1)$ et par conséquent

$$S(N_1) \subset (\infty\ A)$$

et N_1 est aussi positive dans le cube $\prod_{m=1}^{n} [a_m, 2a_m]$ privé du point $(2a_1, \ldots, 2a_n)$.

De plus, en posant $g_o(z) = \int_D [\exp(ix.z) - 1]\ d\ N_o(x)$, nous trouvons que

$$\limsup_{r \to +\infty} [r^{-1} \log |g_o(-i\ r\theta)|] < \Lambda(\theta)$$

où $\Lambda(\theta)$ est l'indicatrice du cube $\prod_{m=1}^{n} [a_m, b_m]$. On obtient, en appliquant le théorème 2.5., que

$$\limsup_{r \to +\infty} [r^{-1} \log |g_1(-i\ r\theta)|] \leq \Lambda(\theta)$$

et en appliquant un théorème de Martineau ([26], théorème 4.3., chapitre II), nous obtenons que le support de N_1 est contenu dans le

cube D , ce qui achève la démonstration du théorème.

II. Applications.

Du théorème 8.1., on déduit facilement les résultats suivants

Théorème 8.2.

Une fonction caractéristique indéfiniment divisible dont la partie gaussienne est nulle et dont le spectre de Poisson est contenu dans le cube $\prod_{m=1}^{n} [a_m, b_m]$ avec $0 < a_m < b_m \leq 2a_m$ n'a pas de facteur indécomposable.

Démonstration. S'il existe un m tel que $b_m < 2a_m$, ceci se déduit immédiatement du théorème précédent. Si $b_m = 2a_m$ $(m = 1, \ldots, n)$ il faut encore vérifier que la partie discrète de N_1 (dans les notations du théorème 8.1.) ne peut pas avoir une masse négative au point $(2a_1, \ldots, 2a_n)$. Ceci résulte du lemme suivant

Lemme.

Si $f(z) = \exp \{ \int_D [\exp(ix.z) - 1] d\, N(x) \}$ où N est une mesure à support contenu dans le cube $D = \prod_{m=1}^{n} [a_m, b_m]$ et si $f(z)$ est une fonction caractéristique entière, la partie discrète de N ne peut avoir de masse négative au point $(b_1, \ldots, b_n)$.

Supposons au contraire que N ait une masse négative au point $(b_1, \ldots, b_n)$. Puisque $f(z)$ est une fonction caractéristique entière, on doit avoir la propriété de crête

$$(3) \qquad \phi(t,y) = \left| \frac{f(t+iy)}{f(iy)} \right| \leq 1$$

Or

$$\phi(t,y) = \exp\{ \int_D [\cos(t.x) - 1] \exp(-y.x)\, dN(x) \}$$

En choisissant t de manière que $t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n = \Pi/2$ et en faisant $y_1 = \ldots = y_n \to -\infty$, nous obtenons $\phi(t,y) \to +\infty$, ce qui contredit (3) et démontre le lemme.

Théorème 8.3.

Une fonction caractéristique indéfiniment divisible $f_o(z)$ dont la partie gaussienne est nulle et dont le spectre de Poisson est un ensemble positif, borné, fermé à points linéairement indépendants n'a pas de facteur indécomposable.

Démonstration. En effet, soit $f_1(z)$ un diviseur de $f_o(z)$. D'après le théorème 6.1., on peut lui associer une fonction spectrale N_1 telle que tout point de $S(N_1)$ soit la combinaison linéaire d'un nombre fini de points de $S(N_o)$. Comme dans la démonstration du théorème, nous pouvons écrire, P_1 désignant la probabilité associée à la fonction caractéristique f_1,

$$P_1 = C_1' \{\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p!} N_1^{p*}\}$$

et en vertu de l'indépendance linéaire de $S(N_o)$, on a sur $S(N_1)$

$$P_1 = N_1$$

Puisque P_1 est positive, N_1 est positive, c.q.f.d.

Du théorème 8.2., (et de ses analogues obtenus en remplaçant certains des a_m et b_m par $-a_m$ et $-b_m$), nous obtenons le théorème suivant qui constitue un complément important des théorèmes de Khintchine énoncés au chapitre I.

Théorème 8.4.

Toute fonction caractéristique indéfiniment divisible de n variables $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est représentable comme le produit convergent d'une suite finie ou infinie de fonctions caractéristiques sans facteur indécomposable.

Ceci se démontre en découpant $\mathbb{R}^n$ en cubes dont les côtés soient de la forme $[a_m, b_m]$ avec $b_m \leq 2a_m$.

Remarquons enfin que les théorèmes 8.2. et 8.3. contiennent tous deux comme cas particulier le résultat de Teicher [37] sur la décomposition des fonctions caractéristiques des lois de Poisson cité dans l'introduction.

CHAPITRE IX

Analycité des fonctionnelles caractéristiques.

Nous étendons maintenant les résultats du chapitre II aux fonctionnelles caractéristiques définies sur un espace de Banach réel. Pour cela, nous rappelons au paragraphe 1 la définition et les propriétés les plus simples des fonctionnelles caractéristiques et au paragraphe 2 la définition des fonctionnelles analytiques. Dans les paragraphes qui suivent nous démontrons les principaux théorèmes sur les fonctionnelles caractéristiques analytiques.

I. Fonctionnelle caractéristique.

Définition. Soient B un espace de Banach réel et P une probabilité définie sur les boréliens de B. On appelle fonctionnelle caractéristique de P la fonction f définie sur le dual B' de B par

$$f(x') = \int_B \exp[ix'(x)]\, dP(x) \qquad x' \in B'$$

Pour les propriétés les plus simples de cette fonctionnelle, voir Grenander [15]. Nous en énonçons quelques-unes qui sont les analogues des propriétés des dérivées des fonctions caractéristiques à une dimension (leur démonstration est d'ailleurs presque identique) et qui nous seront utiles dans la suite. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

$$\delta^m f(x' ; h') = \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} f(x' + \lambda h')\right]_{\lambda=0} \qquad x' \in B' ; h' \in B' ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_m(h') = \int_B [h'(x)]^m\, dP(x) ; \quad \beta_m(h') = \int_B |h'(x)|^m\, dP(x)$$

Nous avons alors les deux résultats suivants :

Proposition 1. Si $\alpha_m(h')$ existe, alors $\delta^m f(x' ; h')$ existe et

$$|\delta^m f(x' ; h')| \leq \beta_m(h')$$

quel que soit $x' \in B'$.

Démonstration. On a en effet

$$\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} f(x' + \lambda h')\right]_{\lambda = 0} = \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} \int_B \exp[i(x' + \lambda h')(x)]\, dP(x)\right]_{\lambda = 0}$$

$$= \int_B \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} \exp[i(x' + \lambda h')(x)]\right]_{\lambda = 0} dP(x)$$

$$= \int_B i^m [h'(x)]^m \exp[ix'(x)]\, dP(x)$$

la relation :

$$\left| i^m [h'(x)]^m \exp[ix'(x)] \right| \leq |h'(x)|^m$$

justifiant la dérivation sous le signe somme. Elle donne de plus la majoration désirée.

Proposition 2. Si $\delta^{2p} f(0 ; h')$ existe, alors $\alpha_{2p}(h') = \beta_{2p}(h')$ existe et

$$\delta^{2p} f(0 ; h') = (-1)^p \alpha_{2p}(h')$$

Démonstration. En posant

$$\Delta_1^\lambda f(x' ; h') = f(x' + \lambda h') - f(x' - \lambda h')$$

$$\Delta_{k+1}^\lambda f(x' ; h') = \Delta_1^\lambda \Delta_k^\lambda f(x' ; h')$$

nous avons

$$\Delta_{2p}^\lambda f(0 ; h') = \int_B [2 i \sin(\lambda h'(x))]^{2p} dP(x)$$

et si $\delta^{2p} f(0 ; h')$ existe

$$\delta^{2p} f(0 ; h') = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Delta_{2p}^\lambda f(0 ; h')}{(2\lambda)^{2p}}$$

D'où

$$\delta^{2p} f(0 ; h') = (-1)^p \lim_{\lambda \to 0} \int_B \left[\frac{\sin(\lambda h'(x))}{\lambda}\right]^{2p} dP(x)$$

Or

$$\int_B \left[\frac{\sin(\lambda h'(x))}{\lambda}\right]^{2p} dP(x) \geq \int_A \left[\frac{\sin(\lambda h'(x))}{\lambda}\right]^{2p} dP(x)$$

où $A = \{ x : x \in B , |h'(x)| \leq \Pi/2\lambda \}$, Dans A , on a

$$\sin^2 [\lambda h'(x)] \geq \frac{4}{\Pi^2} \lambda^2 [h'(x)]^2$$

d'où

$$|\delta^{2p} f(0 ; h')| \geq \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{4}{\Pi^2}\right)^p \int_A [h'(x)]^{2p} dP(x)$$

$$= \left(\frac{4}{\Pi^2}\right)^p \int_B [h'(x)]^{2p} dP(x)$$

ce qui démontre l'existence de $a_{2p}(h')$. La relation entre les "dérivées" et les "moments" se démontre alors comme la proposition 1.

II. Fonctions analytiques (cf. Douady [11] ; voir aussi [1] et [16]).

Soient E et F deux espaces de Banach complexes et u une application de E dans F ; u est une fonction monôme de degré n de E dans F si

$$u(x) = u'(\underbrace{x, \ldots, x}_{n})$$

où u' est une fonction n fois linéaire de E^n dans F . On définit alors la norme de u par

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$$

(Douady utilise une norme différente, mais équivalente ; celle-ci sera pour nous d'un emploi plus commode).

Une fonction f d'un ouvert U de E dans F est dite analytique si quel que soit $x \in U$ on a

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(h)$$

pour $\|h\|$ assez petit où $\{U_n\}$ est une suite de fonctions monômes (U_n de degré n) telle que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n\| z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

ait un rayon de convergence non nul. Les U_n sont déterminés de manière unique. En particulier, on peut considérer $n!\, U_n$ comme les dérivées n-ièmes de f au point x .

III. Fonctionnelles caractéristiques analytiques.

Définition. Nous dirons qu'une fonctionnelle caractéristique définie dans B' est analytique s'il existe une fonctionnelle $A(x')$ à valeurs complexes, analytique dans un ouvert D' contenant l'origine du complexifié $B' + iB'$ de B' et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x') = A(x') \qquad x' \in B' \ ; \ \|x'\| < \delta$$

Théorème 9.1.

Si une fonctionnelle caractéristique f est analytique dans un voisinage de l'origine, elle est analytique dans un tube convexe $B' + i\Gamma'$ (où Γ' est l'intérieur du domaine de convergence de $\int_B \exp[-y'(x)]\, dP(x)$) et y est représentable par l'intégrale

$$f(x') = \int_B \exp[i\, x'(x)]\, dP(x)$$

Démonstration. Puisque f est analytique dans un voisinage de l'origine, on a

$$f(h') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta^n f(0 ; h')$$

pour $\|h'\|$ assez petit. De plus

$$\delta^n f(0 ; h') = i^n \int_B [h'(x)]^n\, dP(x)$$

(ceci étant vrai pour $h' \in B'$, ceci est aussi vrai pour h' appartenant au complexifié de B'). De plus, en posant

$$A_p = \sup_{\|h'\| \le 1} \left| \int_B [h'(x)]^p\, dP(x) \right|$$

$$B_p = \sup_{\|h'\| \le 1} \int_B |h'(x)|^p\, dP(x)$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n$$

converge pour $|z| < R$. Ceci implique que la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_{2p}}{(2p)!}\, z^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\, z^{2p}$$

converge au moins dans ce cercle et de l'inégalité facile à établir

$$B_{2p-1} \le \frac{1}{2} (B_{2p-2} + B_{2p})$$

on déduit que la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p}{p!} z^p$$

converge au moins dans ce cercle.

Soit maintenant $x' \in B'$. Des propositions 1 et 2, on déduit que

$$(1) \qquad f(x'+h') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta^n f(x' ; h')$$

a un rayon de convergence au moins égal à R . (De même si, au lieu de partir de l'origine, on part d'un point imaginaire pur $iy' \in iB'$, ceci s'étend à tout point $x'+iy'$ avec $x' \in B'$). Or, (1) s'écrit

$$\begin{aligned} f(x'+h') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, i^n \int_B [h'(x)]^n \exp[ix'(x)]\, dP(x) \\ &= \int_B \exp\,[ix'(x)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [h'(x)]^n\, dP(x) \\ &= \int_B \exp\,[i(x'+h')(x)]\, dP(x) \end{aligned}$$

l'intervertion étant permise puisque les dérivées sont uniformément majorées par les moments.

On voit donc que si $i\Gamma'$ désigne l'ensemble des points $iy' \in iB'$ tels que $f(z')$ soit analytique dans un voisinage ouvert de iy' , alors f est analytique dans $B'+i\Gamma'$ et y est représentable par l'intégrale de Fourier de P . Or, supposons que $\int_B \exp(-y'_0(x))dP(x)$ converge pour $y'_0 \in B'$. Alors on montre facilement que $f(x')$ est analytique dans un voisinage de $iy' = \lambda i y'_0$ avec $0 < \lambda < 1$. On en déduit que Γ' est identique à l'intérieur du domaine de convergence de $\int_B \exp(-y'(x))\, dP(x)$, donc que Γ' est un sous-ensemble ouvert convexe de B' , ce qui démontre le théorème.

Corollaire.

Soit Γ' un sous-ensemble de B' ouvert, convexe et contenant l'origine (nous notons r la distance de l'origine de B' à la frontière de Γ'). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(I) f est une fonctionnelle caractéristique analytique dans $B'+i\Gamma'$.

(II) la fonction $g(\lambda) = f(\lambda y'_0)$ est une fonction caractéristique analytique dans la bande $-r/\|y'_0\| < \mathrm{Im}\,\lambda < 1$ quel que soit $y'_0 \in \Gamma' - \{0\}$.

(III) la fonction $g(\lambda) = f(\lambda y'_0)$ est une fonction caractéristique qui est valeur au bord d'une fonction $\phi(\lambda)$ analytique dans la

bande $0 < \mathrm{Im}\,\lambda < 1$ quel que soit $y'_0 \in \Gamma' - \{0\}$.

(IV) $\int_{B'} \exp(-y'_0(x))\, dP(x)$ converge quel que soit $y'_0 \in \Gamma'$.

Démonstration. L'équivalence de (II), (III) et (IV) est bien connue (voir théorème 2.2.).

Le théorème précédent montre que (I) entraine (IV). Pour montrer que (II) entraine (I), il suffit de remarquer que la fonctionnelle caractéristique f est alors analytique à l'origine (avec pour rayon de convergence r) et que dans tout Γ' l'intégrale

$$\int_{B'} \exp(-y'_0(x))\, dP(x)$$

existe, ce qui, d'après le théorème précédent, implique l'analycité de f dans tout le tube $B' + i\Gamma'$.

IV. Décomposition des fonctionnelles caractéristiques analytiques.

Théorème 9.2.[1] (Théorème de Raikov).

Si f_0, f_1, f_2 sont des fonctionnelles caractéristiques telles que

(2) $\qquad f_0(x') = f_1(x')\, f_2(x') \qquad\qquad x' \in B'$

et si f_0 est une fonctionnelle caractéristique analytique dans un tube $B' + i\Gamma'$, alors f_1 et f_2 sont analytiques dans ce tube et la relation (2) est vérifiée dans tout ce tube.

Démonstration. Notons P_j la probabilité associée à f_j $(j = 0, 1, 2)$. On a alors

(3) $\qquad P_0 = P_1 * P_2$

D'après le théorème 7.1., il suffit de montrer que la convergence de

$$\int_B \exp(-y'(x))\, dP_0(x)$$

entraîne celle de

$$\int_B \exp(-y'(x))\, dP_j(x) \qquad\qquad (j = 1, 2)$$

Posons

(1) Ce théorème donne une réponse à une question de Linnik ([20], p. 285).

$$\tilde{P}_j(A) = P_j\{y'(x) \in A\} \qquad (j = 0, 1, 2)$$

Alors

$$\int_B \exp(-y'(x))\, dP_o(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u)\, d\tilde{P}_o(u)$$

et puisque y' est linéaire, (3) entraîne la relation

$$\tilde{P}_o = \tilde{P}_1 * \tilde{P}_2$$

Or, d'après un résultat classique (voir, par exemple, Loève, [21], p. 214), la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u)\, d\tilde{P}_o(u)$ entraîne celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u)\, d\tilde{P}_j(u)$ $(j = 1, 2)$ qui est égale à

$$\int_B \exp(-y'(x))\, dP_j(x)$$

ce qui entraîne l'analycité des f_j dans le domaine d'analycité de f_o. De plus, d'après le théorème de Raikov classique, on a alors

$$f_o(iy') = f_1(iy')\, f_2(iy')$$

Soit maintenant $h' \in B' + iB'$ tel que $\|h'\| < R$ (rayon de convergence de f_o à l'origine), alors en utilisant le raisonnement précédent, on obtient que

$$f_o(h') = f_1(h')\, f_2(h')$$

La relation (2) est donc vérifiée dans la sphère de convergence de f_o à l'origine. On en déduit, d'après l'unicité du prolongement analytique, que la relation (2) est valable dans tout le domaine de convergence.

On montrerait de même le

Théorème 9.3.

Soient $f_o(x')$ une fonctionnelle caractéristique définie sur le dual B' d'un espace de Banach réel B et analytique dans le tube $T = B' + i\Gamma'$, $\{f_j(x')\}$ une suite de fonctionnelles caractéristiques définies sur B' et $\{\alpha_j\}$ une suite de nombres réels vérifiant l'une des deux conditions :

a) $j = 1, \ldots, p$

b) $j = 1, 2, \ldots$ et $\alpha_j \geq \varepsilon_o > 0$

Si, pour $\Delta > 0$ assez petit, on a

$$(4) \qquad \prod_j [f_j(x')]^{\alpha_j} = f_o(x') \qquad x' \in B' , \|x'\| < \Delta$$

les f_j sont analytiques dans T, et (4) est vérifiée en tout point imaginaire pur de T. Si, de plus, f_o n'a pas de zéros dans T, la relation (4) est vérifiée dans tout T.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Alexiewicz et W. Orlicz. Analytic operations in real Banach spaces. Studia Math. 14 (1953) 57-78.
2. H. Cramer. Uber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Z. 41 (1936) 405-414.
3. H. Cramer. Problems in probability theory. Ann. Math. Statist. 18 (1947) 165-193.
4. H. Cramer et H. Wold. Some theorems on distribution functions. J. London Math. Soc. 11 (1936) 290-294.
5. R. Cuppens. Sur un théorème de Mamay. C. R. Acad. Sci. Paris 257 (1963) 586-588.
6. R. Cuppens. Sur la décomposition de la composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson. C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) 1113-1116.
7. R. Cuppens. Sur les fonctions caractéristiques analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 86-88.
8. R. Cuppens. Décomposition des fonctions caractéristiques analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 133-135.
9. R. Cuppens. Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 616-619.
10. R. Cuppens. Extensions de la notion de fonction caractéristique analytique. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 682-684.
11. A. Douady. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier 16 (1966) 1-95.
12. D. Dugué. Arithmétique des lois de probabilité. Mémor. Sci. Math. n° 137. Gauthier-Villars, Paris (1956).
13. D. Dugué. Sur le théorème de Lévy-Cramer. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 6 (1957) 213-225.
14. C. G. Esseen. On infinitely divisible one-sided distributions. Math. Scand. 17 (1965) 65-76.

15. U. Grenander. Probabilities on algebraic structures. Almqvist et Wiksells, Uppsala (1963).

16. E. Hille et R. S. Phillips. Functional analysis and semi-groups. American Mathematical Society Colloquium Publications. vol. 31. American Mathematical Society, Providence R. I. (1957).

17. H. Kellerer. Faltungskombinationen zufälliger Grössen und ihre gemeinsame Verteilung. Math Z. 84 (1964) 403-414.

18. R. G. Laha. Une remarque sur les fonctions caractéristiques analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959) 358-359.

19. P. Lévy. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris (1937).

20. Yu. V. Linnik. Décomposition des lois de probabilité (russe) Izdat. Leningrad. Univ., Léningrad, (1960); (traduction française) Gauthier-Villars, Paris (1962).

21. M. Loève. Probability theory. Van Nostrand, New-York, (1955).

22. E. Lukacs. Characteristic functions. Griffin's statistical monographs and courses n° 5. Charles Griffin and Co. Ltd, London (1960).

23. E. Lukacs et R. G. Laha. Applications of characteristic functions. Griffin's statistical monographs and courses n° 14. Charles Griffin and Co Ltd, London (1964).

24. L. V. Mamay. Sur la théorie des fonctions caractéristiques (russe) Vestnik Leningrad. Univ. 15 (1960) n° 1 85-99.

25. J. Marcinkiewicz. Sur les fonctions indépendantes III. Fund. Math. 31 (1938) 86-102.

26. A. Martineau. Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. Analyse Math. 11 (1963) 1-164.

27. I. V. Ostrovkiy. Sur la décomposition des lois de treillis indéfiniment divisibles (russe). Vestnik Leningrad. Univ. 19 (1964) n° 19 51-60.

28. I. V. Ostrovskiy. Sur la décomposition des lois indéfiniment divisibles sans composante gaussienne (russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 161 (1965) 48-51.

29. I. V. Ostrovskiy. Sur la décomposition de la composition d'une loi de Gauss et d'une loi de Poisson (russe). Uspekhi Mat. Nauk 20 (1965) 166-171.

30. I. V. Ostrovskiy. Un analogue multidimensionnel du théorème de Yu. V. Linnik sur la décomposition de la composition d'une loi de Gauss et d'une loi de Poisson (russe). Teor. Verojatnost. i Primenen. 10 (1965) 742-745.

31. I. V. Ostrovskiy. Quelques théorèmes sur la décomposition des lois de probabilité (russe) Trudy Mat. Inst. Steklov 79 (1965) 198-235.

32. I. V. Ostrovskiy. Sur la décomposition des lois de probabilités à plusieurs dimensions (russe). Dokl. Akad. Nauk SSSR 169 (1966) 1017-1019.

33. K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao et S. R. S. Varadhan. Probability distributions on locally compact abelian groups. Illinois J. Math. 7 (1963) 337-369.

34. B. Ramachandran. Application of a theorem of Mamay's to a "denumerable α-decomposition of the Poisson law. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 13 (1964) 13-19.

35. B. Ramachandran. An extension of a theorem of Mamay with application. Sankhyā, ser. A, 27 (1965) 303-310.

36. L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles. 2ième ed. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. V. Actualités Sci. Ind. n° 959. Hermann, Paris (1959).

37. H. Teicher. On the multivariate Poisson distribution. Skand. Aktuarietidskr. 37 (1954) 1-9.